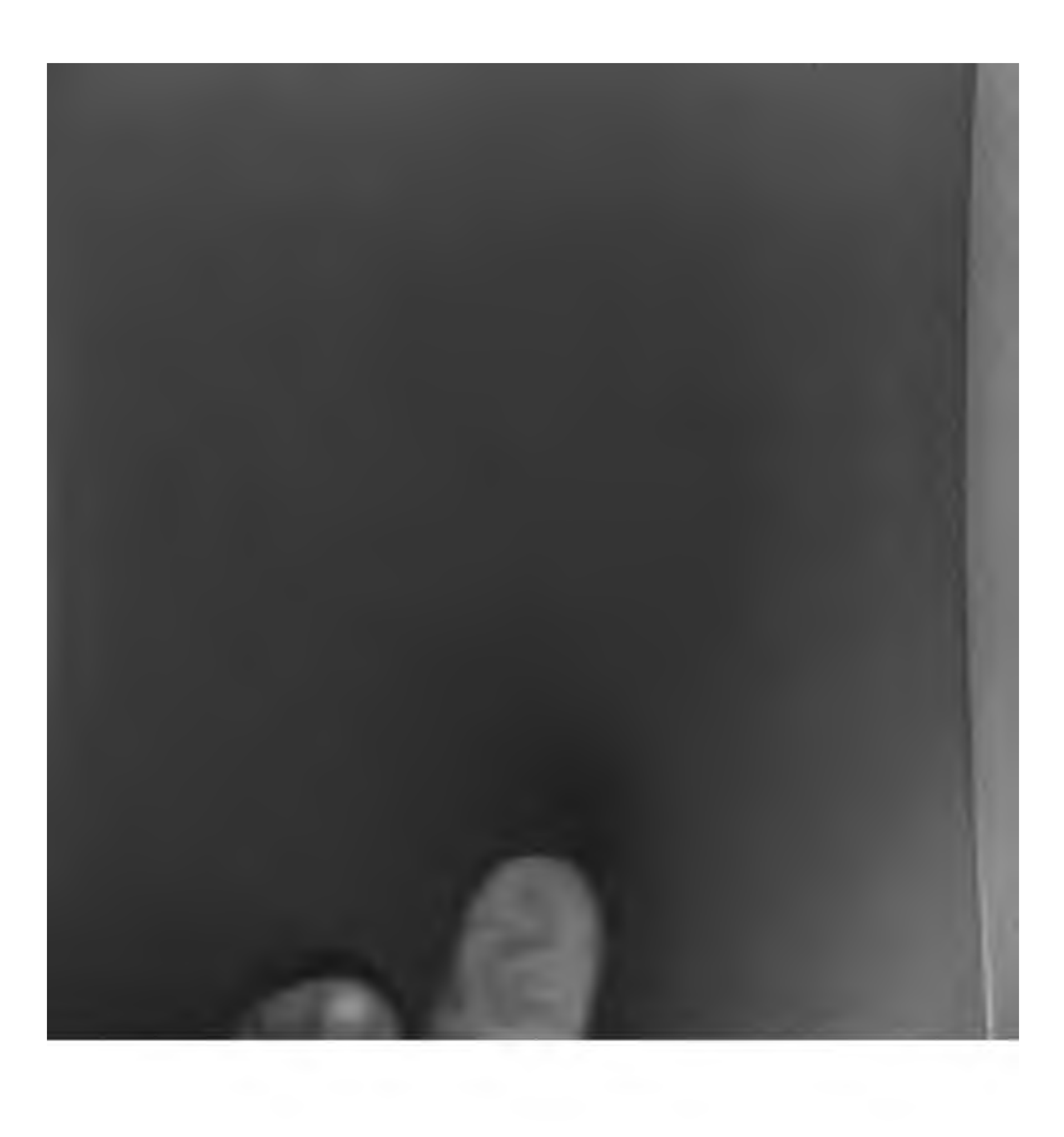






PROPAGATION

DE

L'ÉLECTRICITÉ

HISTOIRE ET THÉORIE

COURS DU COLLÈGE DE FRANCE

PROPAGATION

DE

L'ÉLECTRICITÉ

HISTOIRE ET THÉORIE

PAR

MARCEL BRILLOUIN

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE FRANCE

PARIS (V^{e})

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

ÉDITEUR, LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORWÈGE

6 ET 12, RUE DE LA SORBONNE, 6 ET 12

1904

AVANT-PROPOS

Ce livre est la reproduction assez fidèle des leçons que j'ai professées au Collège de France pendant l'année 1901-1902. Ce n'est nullement un traité d'électricité complet et méthodique ; c'est, conformément, je crois, à l'esprit de l'enseignement du Collège de France, un ensemble de leçons, très inégalement développées, suivant que le sujet dont elles traitent est plus ou moins connu par des publications françaises, ou qu'il m'a paru comporter quelques remarques historiques ou théoriques nouvelles. Quant au mode d'exposition et d'enchainement des idées et des faits, je ne le donne pas comme préférable à tout autre, mais comme assez différent de ceux qui sont ordinairement adoptés par les auteurs français, et en lui-même assez satisfaisant dans le domaine étudié pour provoquer la comparaison, faire réfléchir le lecteur et l'aider à construire pour lui-même l'édifice le mieux approprié à la nature de son esprit.

Je pense faire suivre ce volume, d'un second qui contiendrait les parties essentielles des leçons de 1902-1903 et de 1903-1904, aboutissant à la théorie des électrons, qui repose maintenant sur une solide base expérimentale.

J'ai été aidé dans la rédaction de ce livre par MM. Blanc et Blein, agrégés de Physique, anciens élèves de l'Ecole Normale, qui ont rédigé les leçons et revu les calculs avec un zèle

et un soin dont je les remercie ; j'espère donc n'avoir laiss échapper aucune erreur grave, et peu d'erreurs de signes o de notations. Presque tout le volume était imprimé au débu de l'année 1903, avant que les expériences de MM. Pender e Crémieu eûssent mis hors de doute l'effet magnétique de l convection électrique ; mais la publication a été retardée d plusieurs mois par le dernier chapitre. J'ai dû reprendre e effet la théorie des oscillations de l'ellipsoïde, et il m'a par nécessaire de faire faire les calculs numériques indispensable pour rendre utilisables les fonctions qui définissent la distribution sur les ellipsoïdes, et la loi d'émission par les ellipsoïdes. Ces calculs ont été faits par M. Kannapell ; des vérifications et des contrôles assez nombreux ont été ménagés ; je crois qu'on peut avoir pleine confiance dans le tables qui terminent le volume. Il y aurait grand intérêt à c qu'elles fûssent plus développées ; mais telles quelles, elle font sortir les fonctions $\mathcal{H}$ et $\mathcal{E}$ des limbes de l'analyse pur et permettent de s'en servir dans la plupart des circonstances, sans être arrêté par des calculs préliminaires d'un longueur rebutante.

M. B.

CORRECTIONS ET ÉCLAIRCISSEMENTS

Le désaccord que j'ai signalé (p. 355) entre mes résultats et ceux de M. Max Abraham de Göttingue n'existe pas.

La formule que j'ai citée en note, et qui est en désaccord avec mes résultats, n'est pas la formule générale de M. Abraham, mais seulement la formule limite pour ξ très grand. La formule générale de M. Abraham est, comme il résulte des indications suivantes qu'il m'a adressées, identique à celle que j'ai obtenue On a

$$\overline{S_1}(\xi) = 2e^{\xi}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \qquad \text{(au lieu de} \quad \overline{S_1}(\xi) = 2e^{\xi})$$

d'après les formules 22 *c*, et 22 *f* (p. 98-99). *Math. Ann.* Bd. LII, qui donnent

$$\overline{S_1}(\xi) = 1 . 2 . \xi . \overline{T_1}(\xi) = 1 . 2 . \xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{e^{\xi}}{\xi}\right).$$

En conséquence (p. 355), il faut *effacer* les quatre dernières lignes de la note.

Et (p. 384-385, note), *remplacer* les quatre premières lignes, par :

M. Max Abraham a obtenu les résultats suivants (*Wied. Ann.*, 1898, *n° 11 et Physik. Zeitschr.* 1901) *qui précisent la forme de* θ, *plus que la méthode de calcul adoptée dans le texte.*

Effacer la dernière ligne de la note.

Il y a d'ailleurs accord numérique entre le tableau (p. 383) et les nombres qu'on tire de la formule de M. Abraham, pour $n = 1$ et $n = 2$; le désaccord numérique s'accentue pour les valeurs crois-

santes de n, comme on peut le constater par la comparaison contenue dans le tableau ci-joint :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$-\theta'_n$ (p. 383)	0,61	0,77	0,71	0,80	1,35	1,21	1,37	1,30	1,39	1,3
$-\theta'_n$ (M. Abraham)	0,61	0,77	0,85	0,94	1,00	1,05	1,08	1,12	1,14	1,1

Formule générale de M. Abraham, première approximation,

$$\theta = \frac{n}{4} 2\pi i - \frac{9,66 + \log n}{4} \eta'$$

(p. 385, le dénominateur, du second terme avait été oublié pa mégarde).

Le problème complet relatif aux ellipsoïdes comprend deux ques tions : 1° la détermination de la fonction $\mathfrak{N}$ de θ^2 qui correspond à un nombre $n + 1$ de concamérations de l'ellipsoïde, quelle que soi son excentricité ; 2° la recherche des vibrations propres, caractérisée par θ^2, de l'ellipsoïde d'excentricité donnée. A l'exemple de M. Maclaurin, j'ai cru utile de séparer ces deux questions distinctes, et j'a donné les premiers termes du développement de $\mathfrak{N}$ suivant les puissances de θ^2, en partant de la valeur $n(n + 1)$ de $\mathfrak{N}$ qui convient à la sphère.

C'est donc surtout pour les ellipsoïdes peu différents de la sphère pour les valeurs pas trop grandes de θ^2, que les formules dont le coefficients numériques sont donnés dans les tables donneront de résultats d'une approximation suffisante. — Ces formules sor d'ailleurs applicables aux vibrations forcées aussi bien qu'aux vibrations propres des ellipsoïdes.

Dans son mémoire des Annales de Wiedemann (1898) M. Abrahar est parti au contraire de la connaissance exacte des vibrations propres de la tige sans épaisseur, pour déterminer simultanément les vibrations propres des ellipsoïdes très allongés, et les valeurs particulières de $\mathfrak{N}$ qui correspondent à ces vibrations propres.

N'ayant plus d'objection à faire au sujet de l'intégrale de rayonnement qu'il a employée, puisque c'est la même que j'ai obtenue, e

ses calculs ultérieurs me paraissant corrects, j'accepte comme exacte la forme générale dûe à M. Abraham, et que j'ai reproduite en note (p. 384-385), d'autant plus que les valeurs numériques concordent dans la limite même de confiance que j'étais disposé à accorder aux miennes (n° **426**, p. 383). Au lieu d'une limite finie pour l'amortissement en fonction du nombre n des subdivisions et d'une alternance des n pairs et impairs, les formules de M. Abraham indiquent un accroissement indéfini avec n, bien que plus lent que mes valeurs numériques. — C'est aussi la conclusion que j'adopte.

M. Abraham a d'ailleurs donné (*Phys. Zeit.* 1901, n° **22**) une méthode rapide de calcul de l'amortissement qui ne laisse aucun doute.

Il resterait à déterminer une forme de développement de $\mathfrak{N}$ en θ^2, donnant une bonne approximation pour les grandes valeurs de θ^2, et les ellipsoïdes allongés en dehors de leurs vibrations propres, comme celle que j'ai donnée convient aux ellipsoïdes peu allongés ; mais cette recherche ne saurait trouver place dans cette note rectificative.

M. B.

---

con-

10

1,

HISTOIRE ET THÉORIE
DE LA
PROPAGATION
DE
L'ÉLECTRICITÉ

LIVRE PREMIER

CHAPITRE PREMIER

FIN DU XVIII[e] SIÈCLE. — CAVENDISH

1. — L'honorable Henry Cavendish est né à Nice, le 10 octobre 1731, mort à Clapham, le 24 février 1810 ; il était membre de la Société Royale de Londres depuis 1760. Fils aîné de lord Charles Cavendish, lui-même observateur précis et zélé (¹), et de lady Anne Grey, il était directement apparenté au duc de Devonshire et au duc de Kent. Il paraît avoir vécu assez étroitement jusqu'à la mort de son père, 1783, dans les dépendances de l'hôtel paternel, « Great Malborough Street », et y avoir fait toutes ses expériences d'électricité. Tout différent des élégants démonstrateurs français qui ont légué à nos cabinets de physique tant d'appareils dont les sup-

(¹) Ses observations sur la dépression capillaire du mercure (*Ph. Tr.*, 1776), ont servi de contrôle à Young, à Laplace, à Poisson, à Ivory pour leurs théories.

ports de métal gravé ou ciselé ont coûté plus de travail que les pièces essentielles, H. Cavendish n'avait en vue que le but scientifique ; c'était, à ce qu'il semble, un « bricoleur » de l'école de Franklin, sachant obtenir la précision par les moyens les plus rudimentaires, employant plus souvent le bois blanc que le métal pour la carcasse de ses appareils. Il entreprenait les recherches les plus laborieuses pour tirer au clair une difficulté que lui seul apercevait ; mais il n'éprouvait aucunement le besoin de faire connaître les résultats de ses recherches, même en conversation, car il était d'un caractère assez singulier et peu sociable. Le Dr Thomas Young, son confrère de la Société Royale et son contemporain, un des plus pénétrants physiciens du commencement du XIXe siècle et des plus érudits, ignorait complètement les travaux inédits de Cavendish, comme le montre son article de l'*Encyclopédie Britannique*. C'est lord Kelvin qui en a révélé la valeur (1849), stupéfait de trouver dans un extrait que lui montrait leur possesseur, Snow Harris, l'exacte valeur $\frac{1}{1,57}$ $\left(\frac{2}{\pi} = \frac{1}{1,571}\right)$ du rapport de la capacité d'un disque circulaire à celle de la sphère de même rayon. Son vœu, que les manuscrits de Cavendish sur l'électricité soient entièrement publiés, a été exaucé par Maxwell, qui en a mis en relief la singulière valeur, dans l'introduction historique et dans les notes théoriques qu'il y a ajoutées (1).

Cavendish avait établi, dès 1772, la répulsion de l'électricité suivant la loi de l'inverse du carré de la distance, treize ans avant que Coulomb établisse la même loi pour les corps électrisés. Il avait découvert la notion de capacité, utilisant constamment celle de potentiel, sous le nom de « degré d'électrisation » ; il avait mesuré en pouces, comme nous faisons en centimètres, les capacités de

(1) *The electrical researches of the honourable* HENRY CAVENDISH, F. R. S., written between 1771 and 1781, edited from the original manuscripts in the possession of the DUKE of DEVONSHIRE K. G., by J. CLERK MAXWELL, F. R. S. — *Cambridge, at the University Press*, 1879. (358 pages dont 83 seulement avait déjà paru dans les *Tr. Ph.*, 1771 et 1776.) Ce volume ne contient aucune des autres recherches inédites de Cavendish, pas même celles sur le *Magnétisme* qu'il paraît avoir poursuivies de 1773 jusqu'à sa mort.

corps de différentes formes, les pouvoirs inducteurs spécifiques de différents isolants, cherché si elles dépendent du potentiel ; et, chose curieuse, toutes ces découvertes qu'un autre anglais illustre, Faraday, refera un demi siècle plus tard, avec moins de netteté d'esprit, mais plus de fécondité, n'ont aucun point commun avec les travaux d'une perfection si achevée, publiés par Coulomb à partir de 1785.

2. — De 1773 à 1781, Cavendish fit toute une série d'expériences sur la résistance électrique, dont on ne connaissait, jusqu'à la publication de ses notes de laboratoire, que les résultats suivants, donnés sans explications dans son mémoire sur la torpille (1776) : « le fil de fer conduit à peu près 400 millions de fois mieux que l'eau de pluie ou l'eau distillée ; l'eau de mer ou une solution de 1 de sel dans 30 d'eau, conduit 100 fois mieux, et une solution saturée de sel marin, 720 fois mieux que l'eau de pluie. » C'est tout ; le rapport fer-eau salée est exact pour la température de 11° C ! Notons que la balance de Coulomb ne devait être inventée que neuf ans plus tard, l'électroscope à feuille d'or onze ans plus tard.

Quelle méthode, quel instrument de mesure Cavendish employait-il donc ? Une méthode physiologique ! Il comparait l'intensité de deux chocs par la sensation perçue aux poignets et aux coudes et appréciait quel était le plus fort.

« Les conducteurs à comparer étaient, dit Maxwell [1], pour la plupart, des solutions, de concentration connue, de sel commun ou d'autres substances. Ces solutions étaient placées dans des tubes de verre, de plus d'un mètre de long, courbés près d'une extrémité. Les tubes avaient été au préalable calibrés au mercure.

« Deux fils étaient introduits dans le tube, probablement à travers des trous dans des bouchons à chaque bout, pour servir d'électrodes. La longueur de la colonne utile du liquide pouvait être changée en faisant glisser un des fils dans la partie rectiligne du tube.

« Pour envoyer des décharges égales et d'égale force électromotrice à travers deux tubes différents, Cavendish choisit six arres de

[1] Introduction, p. LVII et suiv.

capacité à peu près égale, parmi les quarante-neuf de sa grande batterie. Les deux tubes étaient placés de telle sorte que les deux fils introduits dans les extrémités courbées communiquaient avec l'extérieur de cette batterie de six jarres. Les fils introduits dans les parties droites des tubes étaient attachés à deux morceaux de papier d'étain, isolés séparément. Les six jarres étaient alors chargées à la fois par le même conducteur, jusqu'à ce que l'électromètre (à balle de sureau) indiquât un degré convenable d'électrisation. Le conducteur de charge était alors enlevé, et les six jarres restaient avec leurs armatures intérieures isolées l'une de l'autre, et également chargées.

« Cavendish prenant alors deux morceaux de métal, un dans chaque main, touchait avec l'un le papier d'étain attaché à l'un des tubes et avec l'autre, le bouton de la première jarre, de manière à recevoir un choc, la décharge passant à travers son corps et le tube 1 ».

Il recommençait avec le tube 2 et la seconde jarre ; puis avec le tube 1 et la troisième jarre, et ainsi de suite, en alternant les tubes 1, 2 ; et comparait les trois chocs reçus à travers le tube 1, à ceux du tube 2. Ayant trouvé les uns plus intenses, il changeait l'enfoncement du fil métallique dans l'un des deux tubes, de manière à se rapprocher de l'égalité, et recommençait. Il continuait ainsi jusqu'à inversion, et, de l'ensemble des essais, il déduisait quelles longueurs des deux tubes rendaient les chocs bien égaux.

Plus tard, il paraît avoir employé la batterie entière de quarante-neuf jarres, groupées par sept, et avoir eu bénéfice à utiliser une charge plus considérable avec moins de force électromotrice [1]. Sa délicatesse d'appréciation devint vraiment merveilleuse, à en juger par l'accord des résultats entre eux, et par leur comparaison avec les résultats modernes les meilleurs.

Cavendish cherchait à quelle puissance de la vitesse (intensité du courant) la résistance (RI) est proportionnelle. Quatre séries d'expé-

[1] Probablement par diminution d'importance relative de l'étincelle au moment du contact.

riences, dont on trouvera le détail plus loin, au moyen de tubes de différents diamètres, contenant la même solution, lui ont donné les puissances

1,08 ; 1,03 ; 0,976 ; 1,00 ;

ce que nous appelons maintenant résistance (R) paraissait donc proportionnel aux puissances

+ 0,08, — 0,03, — 0,024, 0,00,

de l'intensité I.

3. — Résumons les résultats généraux de Cavendish sur les dissolutions (1776-1777).

La résistance des dissolutions de sel varie avec la température ; la variation est la même quelle que soit la concentration, entre 10° et 35° C. Pour les solutions diluées, le produit de la résistance par la concentration est constant (dilution maximum employée par Cavendish : 20 000). La résistance de l'eau varie avec son origine : l'eau de pompe résiste 4,2 fois plus que l'eau de pluie, celle-ci 2,4 fois plus que l'eau distillée. *La conductibilité de l'eau distillée augmente après 3 ou 4 heures de séjour dans un tube de verre.*

Pour étendre la loi énoncée pour les solutions faibles, jusqu'aux solutions les plus diluées, il suffisait à Cavendish d'admettre que son eau distillée contenait déjà 1 : 120 000 de sel.

Puis, il compare divers sels en SOLUTIONS ÉQUIVALENTES [1] à 29 de sel marin : sel marin, chlorure de potassium, sel ammoniac, sulfate de soude, nitre, carbonate de potasse, acide sulfurique, acide chlorhydrique ; il n'indique pas comment il a choisi ses poids équivalents, qui ne paraissent pas conformes à ceux qui avaient cours à cette époque, mais sont pour la plupart très voisins des nôtres.

Il cherche aussi si le passage d'un conducteur à un autre cause une résistance particulière : pour cela, il compare un tube dont la

(1) N° 626, p. 329 et n° 694, p. 360. Voir préf. de MAXWELL, p. LXII et note 34, p. 415.

solution est coupée en huit parties par des gouttes de mercure, à un autre dont la solution était continue ; il ne trouve qu'une différence insignifiante entre les longueurs totales des solutions. Avec les faibles quantités d'électricité mises en jeu, la polarisation ne pouvait jouer en effet qu'un rôle insignifiant.

4. — Après cet aperçu, encore bien incomplet des travaux inédits de Cavendish sur l'électricité, revenons avec un peu plus de détails sur la question de la loi d'Ohm (¹), et commençons par rappeler les idées qui le guidaient en électrostatique :

« Il existe une *substance*, que j'appelle fluide électrique dont les particules se repoussent entre elles et attirent les particules de toute autre *matière*, avec une force inversement proportionnelle à une certaine puissance de la distance, moindre que le cube (²) », cette dernière réserve étant nécessaire pour la stabilité. Les corps en sont remplis, et sont dits saturés lorsque la quantité de fluide y est telle et tellement distribuée, que « l'attraction du fluide électrique d'une petite partie du corps sur une particule donnée de matière, soit égale à la répulsion due à la matière de la même petite partie du corps ». Dans certains corps, le fluide est immobilisé, ce sont les isolants ; dans d'autres, il est mobile, ce sont les conducteurs. Partant de ces hypothèses, Cavendish montre la distribution rigoureusement superficielle de l'excès ou du déficit du fluide sur la sphère, pour la puissance 2 ; la densité croissante du centre à la surface pour les puissances intermédiaires entre 2 et 3 ; décroissante, au contraire, pour les puissances inférieures à 2. C'est déjà le principe théorique de l'expérience, à laquelle il fait une rapide allusion, qu'il devait réaliser à la fin de l'année suivante, sans en rien publier, et qui lui donna la puissance 2 à $\frac{1}{50}$ 0,02 près.

5. — Dans tout ce mémoire, pour reconnaître l'équilibre théorique, il suppose constamment les corps à comparer, réunis par un

(¹) P. 203-207, 310-319, 321-343, 350-361.

(²) An attempt to explain some of the principal phenomena of electricity by means of an elastic fluid. — *Phil. Tr.*, 1771.

canal, dans lequel le fluide est supposé incompressible ; c'est le fil métallique fin de nos raisonnements actuels ; et l'équilibre est atteint, lorsque la pression du fluide est uniforme.

« Pour juger, dit-il dans la deuxième partie de son mémoire (n° 102), si un corps A est *électrisé positivement ou négativement*, supposons qu'un autre corps B de forme et de dimension données, soit placé à une distance infinie de A et de tout autre corps, *surchargé* ou *sous-chargé* (over or under charged). Supposons que B contienne la même quantité de fluide que s'il communiquait avec A par un canal de fluide incompressible : alors, si B est *surchargé*, je dis que A est électrisé positivement ; s'il est *souschargé*, je dis que A est électrisé négativement ; plus le degré de surcharge de B est grand, plus le *degré d'électrisation* positive de A est grand, et v. v. »

La définition expérimentale du potentiel est encore la même aujourd'hui.

Les définitions théoriques se trouvent avec plus de netteté encore, dans un manuscrit préparatoire (1) resté inédit :

« Déf. I. Lorsque le fluide électrique dans un corps est plus pressé que dans l'état naturel, je dis que le corps est électrisé positivement ;...

« Déf. II. Lorsqu'un corps contient plus de fluide électrique que dans l'état naturel, je dis qu'il est surchargé ;... »

6. — Ainsi familier avec ces notions distinctes de degré d'électrisation et de charge électrique, habitué à l'usage des canaux dans ses raisonnements, partant de l'hypothèse d'un seul fluide, qui occupe tout l'espace, mais n'est mobile que dans les conducteurs, Cavendish était naturellement conduit à regarder le fluide comme s'écoulant à travers toute la section, sans que le caractère superficiel de la distribution statique lui causât la moindre gêne. Dès la fin du mémoire publié en 1771, la proportionnalité de la résistance à la longueur est regardée comme évidente (n° 131). Il était également préparé à se représenter exactement le partage des décharges entre plusieurs circuits parallèles ; c'est ce qui lui permit de comprendre et de coor-

(1) *Thoughts concerning electricity*, p. 96, n° 201.

donner des phénomènes singuliers observés par G. Walsh [1], sur la torpille dans l'air et dans l'eau. Dès le début de son mémoire [2], Cavendish explique que, la résistance du bain d'eau salée étant comparable avec celle du corps humain, le choc de la torpille dans l'eau est encore sensible, mais moindre que dans l'air, et il donne un calcul exact du partage de la décharge d'une batterie entre le corps de l'observateur, l'eau, et le bois humide qui représente le corps de sa torpille artificielle.

7. — Beccaria avait déjà remarqué (1772) que le choc reçu à travers un tube large est plus intense qu'avec un tube étroit. Cavendish précisa cette notion en novembre 1773. Il compara [3] les chocs très faibles de deux jarres soit à travers un tube soit à travers neuf tubes parallèles de verre de même longueur et de même section totale approximative que le premier, pleins d'une même solution salée faible : 37 pouces du premier contenaient 250 grains d'eau, 37 pouces des neuf autres contenaient 258 grains d'eau.

La différence fut douteuse; pourtant le choc à travers le tube unique parut plus fort. Avec sept tubes seulement, la différence était manifeste.

Puis il compara une longueur de 44 pouces 1/4 du tube large à un tube ne contenant que 44 grains d'eau pour 37 pouces de longueur, et trouva que 8p,4 est trop et 5p,2 n'est pas assez. Prenant la moyenne 6p,8 et comparant les rapports des longueurs et des sections, il trouva

$$\frac{6,8}{44\frac{1}{4}} = \left(\frac{44}{250}\right)^{1,08} \quad \left[\frac{l}{l'} = \left(\frac{S}{S'}\right)^{1,08}\right].$$

ce qu'il énonça en disant que la résistance est proportionnelle à la puissance 1,08 de la vitesse (supposée en raison inverse de la section).

(1) Of the electric property of the Torpedo. — *Ph. Tr.*, 1773.
(2) An account of some attempts to imitate the effects of the torpedo by electricity. — *Ph. Tr.*, 1776.
(3) N° 574, p. 293.

Deux autres tubes, comparés à la même époque, donnèrent l'exposant 1,03.

En janvier 1781, huit ans plus tard, Cavendish reprit la même expérience avec deux nouveaux tubes et trouva une première fois l'exposant 0,976; la seconde fois 1,00.

D'ailleurs, ni dans le journal d'expériences, ni dans le relevé final des résultats, Cavendish n'a souligné l'importance de ce dernier résultat — 1,00, — qui se trouve au milieu des expériences sur les dissolutions; il n'en est pas moins vrai que dès cette époque éloignée, Cavendish savait que la résistance d'un tube est proportionnelle à la longueur et en raison inverse de la section.

8. — Pour la comparaison du fer et de l'eau salée, il opère autrement (1). Les deux bouts du fil de fer de 2 540 pouces (12 pieds pèsent 14 grains) sont attachés à des poignées de laiton, tenues dans chaque main et la décharge se partage entre le fil de fer et le corps de Cavendish. Remplaçant le fil de fer par une colonne d'eau salée à saturation (1 pouce contient 9,12 grains d'eau pure) il trouve que le choc est le même pour une longueur de 5,1 pouces et diffère si on change la longueur d'un quart de pouce.

C'est seulement en 1776 que fut arrêtée la technique décrite plus haut par Maxwell et qui a servi à toutes les mesures sur les solutions.

Les données sont assez complètes pour que Maxwell ait pu inscrire à côté de chaque expérience la résistance en ohms d'après les mesures de Kohlrausch.

Pour les fils de cuivre, les essais faits en 1781 (2), ont présenté de grandes difficultés, et fourni des résultats assez singuliers que Maxwell n'a pas réussi à reproduire.

9. — Stupéfait de l'étendue et de l'exactitude des résultats obtenus par Cavendish en appréciant l'identité des chocs dans di-

(1) N° 576, p. 294.
(2) P. 338-343.

verses circonstances, Maxwell a repris une étude, dont Cavendish s'était occupé à diverses reprises, celle de l'intensité de la sensation produite par une décharge électrique (1). Cavendish s'attendait à ce que l'intensité du choc fût proportionnelle au produit de la quantité d'électricité par sa vitesse, ou, en langage actuel, au travail électrique dépensé dans le corps; mais l'expérience ne répondit pas à son attente. Or, on sait maintenant que la rapidité de la décharge a une influence prépondérante sur la sensation. A travers une résistance R sans self induction, la loi de l'intensité I en fonction du temps est, comme on sait,

$$I = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{t}{CR}}$$

pour un potentiel initial V_0 et une capacité C. Comment la sensation dépend elle de $\frac{V_0}{R}$ et de CR? ou plutôt, quelle est la relation entre $\frac{V_0}{R}$ et CR quand la sensation est la même? C'est ce que Maxwell a étudié par la sensation de choc qu'il ressentait dans les poignets et dans les coudes, en recevant la décharge par les deux mains plongées chacune dans un baquet d'eau salée — ou mieux par l'inscription de la secousse musculaire d'une grenouille. Pour des temps CR qui ont varié de $0^s,01$ à $0^s,000\,01$, $\frac{V_0}{R}$ a varié à peu près comme $(CR)^{0,65}$; les quatre expériences de Cavendish que Maxwell a pu calculer conduisent à des exposants du même ordre.

10. — De tous ces résultats, Cavendish ne publia rien; il n'en laissa rien savoir, ou à peu près rien, même à ses collègues de la Société Royale de Londres; car il était peu communicatif : Maxwell note *une* visite de quelques membres de cette Société dans son laboratoire, pour voir les expériences sur la torpille. Dix ans de travaux assidus furent ainsi perdus pour la Science; les lois si fécondes des capacités, des pouvoirs inducteurs, de la conductibilité des dissolu-

(1) Note 31, p. 437-443.

tions restèrent inconnues des savants pendant plus de trente ans ; elles avaient été découvertes à nouveau et étaient acquises à la Science depuis près d'un demi siècle, lorsque la publication des manuscrits de Cavendish fit à la fois admirer sa puissance de travail, ainsi que la pénétration de son esprit, et regretter son indifférence pour le public et son dédaigneux silence.

CHAPITRE II

DÉBUTS DU XIX[e] SIÈCLE
DAVY. — BARLOW. — BECQUEREL

11. — A peine Œrstedt avait-il découvert l'action du courant sur l'aiguille aimantée, et Ampère les lois qui régissent cette action, que tous les physiciens se mettaient à l'œuvre. Parmi eux, un des plus féconds et des plus pénétrants, sir Humphry Davy faisait connaître par une lettre au D[r] Wollaston ([1]), l'attraction des courants sur la limaille de fer, l'aimantation de l'acier par les courants d'une pile intense et par les décharges des bouteilles de Leyde, et tout un cortège de faits curieux ; il avait essayé l'action de l'aimant sur l'arc électrique ; mais il ne réussit l'expérience que quelques mois plus tard, en employant la grande batterie de l'Institution Royale de Londres, formée de 2 000 couples. Dans le mémoire ([2]) qui nous intéresse directement, Davy observe l'échauffement d'un même fil immergé dans différents milieux, son attraction sur la limaille de fer ; puis, il se demande « si une courte longueur d'un fil fin, préservé de la fusion par le refroidissement, transmet *toute* l'électricité de batteries voltaïques puissantes ; » il fait un second circuit indépendant, au moyen de deux fils d'argent partant des bornes de la batterie et plongeant dans l'eau, « de façon que la décomposition

([1]) On the magnetic phenomena produced by Electricity. — *Ph. Tr.* for the year 1821. Part. I, p. 7 — 19 — Read. Nov. 16, 1820.

([2]) Farther researches on the magnetic phenomena produced by electricity; with some new experiments on the properties of electrified bodies in their relations to conducting powers and temperature.
(5 Juillet 1821). — *Ph. Tr.* 1821. Part. II, p. 425-439.

chimique de l'eau indique un résidu d'électricité dans la batterie ». De cette façon, il trouve qu'un certain fil de platine refroidi laisse un grand résidu d'électricité dans douze des batteries employées, mais est capable d'en décharger exactement six.

« Ayant ainsi reconnu l'existence d'une limite à la quantité d'électricité que les fils sont capables de transmettre, il devint facile d'instituer des expériences sur les pouvoirs conducteurs différents des différents métaux, et sur les relations de ce pouvoir avec la température, la masse, la surface ou la longueur du corps conducteur, et les conditions de l'action électromagnétique. »

Davy fixe sa technique minutieusement; en particulier, il employe la même solution d'acide et d'eau pour toutes ses batteries, ce qui semble indiquer qu'il travaillait toujours avec la pile *neuve*.

12. — Interrompant l'analyse du mémoire, fixons la théorie de la méthode.

Lorsqu'aucune bulle gazeuse ne se dégage sur le fil d'argent négatif, le débit à travers le voltamètre est devenu nul, et la différence de potentiel aux bornes a une valeur déterminée E_0. D'autre part, la technique adoptée fixe la force électromotrice E de la batterie et sa résistance R, y compris les fils de jonction. On a donc, en appelant r la résistance du fil conducteur étudié :

$$\frac{E}{R + r} = \frac{E_0}{r} = \frac{E - E_0}{R}$$

$$r = \frac{E_0}{E - E_0} R.$$

13. — Davy observe d'abord que le pouvoir conducteur des métaux varie en sens inverse de leur température, quel que soit le procédé de chauffage employé. Un fil de platine étant chauffé au rouge par le courant, si on en chauffe une partie au blanc au moyen d'une lampe, le reste devient sombre.

Dès lors il a soin de maintenir les conducteurs dans l'eau froide; néanmoins la régularité n'est pas parfaite ; « avec la batterie récem-

ment chargée, les différences entre les conducteurs sont moins accusées qu'avec une batterie usée [1] ».

Quoi qu'il en soit, en employant des batteries en nombre varié, Davy reconnaît que la conductibilité d'un fil est en raison inverse de sa longueur ; désormais, au lieu de changer le nombre de batteries, il en conserve un nombre fixe, et change la longueur des fils à comparer, ce qui permet d'opérer plus rapidement.

Il trouve « que le pouvoir conducteur d'un fil pour l'électricité est à peu près proportionnel à sa masse ; ainsi un fil de platine pesant 1,13 grain par pied et un autre pesant 6,7 grains, employés sous la même longueur, déchargent l'un une batterie, l'autre six ». On pouvait d'ailleurs remplacer le gros fil par six fils fins côte à côte. « Ce résultat suffit à prouver que la surface n'a pas de relation avec le pouvoir conducteur, ce que prouve mieux encore une expérience directe : des longueurs égales de fil de platine l'un rond, l'autre passé au laminoir de façon à sextupler sa surface, furent comparées ; le fil aplati conduisait mieux dans l'air, parce qu'il s'y refroidissait mieux ; mais dans l'eau aucune différence ne put être perçue ».

Voilà l'expérience fondamentale de Davy sur ce sujet ; on voit que le rôle de la section comparé à celui de la surface en ressort nettement ; mais en faisant intervenir la masse dans son énoncé, Davy laissait encore presque tout à faire, et ce n'est pas sans raison que nous verrons Ohm combattre cet énoncé quelques années plus tard et revendiquer pour lui-même la loi de la section.

14. — Le mémoire de Davy se termine par deux expériences intéressantes.

(1) Même si l'absence de bulle n'indique pas un courant nul au voltamètre, mais un courant minimum I_0 ; il semble que la substitution d'un fil à un autre devrait exiger l'égalité de résistance ; car soit R_0 la résistance du voltamètre, les équations

$$E - RI = E_0 + R_0 I_0 = r(I - I_0)$$

donnent

$$r = \frac{E_0 + R_0 I_0}{E - E_0 - (R + R_0) I_0} R.$$

Fermant une batterie par une chaîne de fils de même diamètre, il constate qu'ils s'échauffent d'autant moins qu'ils sont plus conducteurs, dans l'ordre suivant de décroissance : fer, palladium, platine, étain, zinc, or, plomb, cuivre, argent ; mais qu'ils attirent néanmoins tous le même poids de limaille de fer.

Il fait même une mesure en plongeant un fil d'argent et un fil de platine de même diamètre et de même longueur dans des bains d'huile, que le premier échauffe de 4° et le second de 22°.

On voit, par cette analyse incomplète, combien ce mémoire est nourri et intéressant. Extrayons-en pour finir, un argument contre le calorique : « Si la chaleur était une substance, on ne saurait imaginer qu'elle soit chassée du platine (chauffé par le courant électrique), car une quantité de chaleur indéfinie peut être engendrée du même platine, aussi longtemps que le courant est excité, ou aussi souvent qu'on le renouvelle. »

15. — La même année, le mémoire de Cumming [1] sur les piles thermoélectriques ne contient que quelques indications peu importantes sur la conductibilité.

Deux ans après, le physicien Barlow [2], à qui ses perfectionnements de la boussole marine valurent une récompense nationale, constate qu'en employant des fils de cuivre de même longueur, mais de plus en plus gros, il arrive un moment où une augmentation considérable du diamètre ne change rien à l'intensité du courant, et qu'il en est de même avec le laiton. Il donne ses résultats corrigés des variations de la pile. Dans une série d'expériences où il a fait varier la longueur d'un même fil de 98 à 833 pieds, il compare les tangentes des déviations aux racines carrées des longueurs. « Les différences entre l'observation et le calcul sont trop grandes, dit-il, — (elles at-

(1) *Annals of Pilosophy*, 1823.
Cambr. Philos. Trans., p. 63, 1821.

(2) On the laws of electromagnetic action, as depending on the length and dimensions of the conducting wire, and on the question, whether electrical phenomena are due to the transmission of a single on of a compound fluid. Peter Barlow. — *Edinb. Phil. Journ.* XII, 1825, p. 105-114.

teignent $\frac{1}{8}$ à $\frac{1}{4}$ entre 300 et 700 pieds !) — pour pouvoir traiter la loi supposée comme exacte, mais elles sont assez faibles pour que l'approximation soit acceptable. » C'est seulement sous cette forme modeste que Barlow présente cette loi de la racine carrée de la longueur. Mais dans les résumés, on y mettra moins de précautions ; les éditeurs du *Philosophical Magasine* [1], dans une note du numéro de mars 1825, annoncent que d'après Barlow l'intensité diminue très sensiblement comme l'inverse du carré de la *distance*, et que par conséquent « l'idée de construire des télégraphes électriques est chimérique ». Cette note de 13 lignes est traduite aussitôt, et commentée par Schweigger [2], à la suite du premier mémoire si imparfait d'Ohm.

16. — La variabilité de la pile rendait les expériences de Davy peu régulières ; dans un mémoire lu quelques années plus tard (31 janvier 1825) à l'Académie des Sciences [3], Becquerel, après avoir rappelé et critiqué la méthode de Davy, cherche à se mettre à l'abri des variations de la pile. Pour cela il invente le galvanomètre différentiel, et la méthode de zéro bien connue aujourd'hui, qui permet de constater l'égalité de deux fils intercalés sur les deux circuits du différentiel, comme le rappelle suffisamment la figure, copie exacte de celle du Mémoire original. Toutes précautions sont prises pour apprécier exactement le zéro du galvanomètre, pour établir de bons contacts, pour maintenir les fils à la même température de la glace fondante.

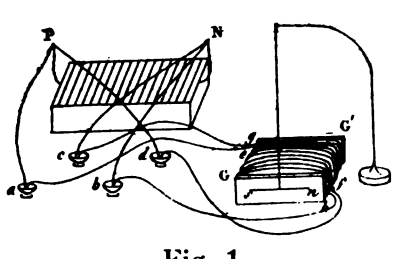


Fig. 1

(1) *Philos. Mag. and Journal*, by Tilloch and by. Taylor. London, t. LXV, 1825, p. 229.

(2) *Jahrb. der Ch. Phys.* Schweigger, 1825, t. LXIV, p. 118.

(3) Du Pouvoir conducteur de l'électricité dans les métaux, et de l'intensité de la force électrodynamique en un point quelconque d'un fil métallique qui joint les deux extrémités d'une pile. — *Ann. Ch. Phys.* t. XXXII, 1826, p. 420-430.

« Pour obtenir la même conductibilité dans deux fils de même métal, il faut que leurs poids soient proportionnels aux carrés de leurs longueurs (1), ou bien que les longueurs soient dans le rapport des sections des fils. Cette loi qui paraît rigoureuse pour toutes les longueurs et grosseurs de fil, rentre dans celle qui a été observée par M. Davy... »

« La conductibilité électrique croît donc avec les masses, et non avec les surfaces ; par conséquent le fluide électrique en mouvement ne se porte pas à la surface des corps conducteurs, comme lorsqu'il est en équilibre ; il pénètre dans leur intérieur. »

Becquerel définit ensuite les pouvoirs conducteurs relatifs des métaux comme proportionnels aux longueurs qui sous le même diamètre donnent la même conductibilité — il en fait l'application aux métaux tenaces en les étirant à la filière, et aux métaux mous en les fondant dans des tubes de verre calibrés.

Désormais nous sommes en présence d'une méthode de mesure correcte et de définitions précises.

17. — Dès la fin de cette même année, ce mémoire, paru au Bulletin de Férussac en mai, est analysé en détail, ainsi que celui de Barlow, et commenté par Schweigger dans son Journal (2) ; ces commentaires eux-mêmes furent immédiatement suivis d'une lettre d'Ohm, qui juge tout à fait insuffisante l'explication du désaccord entre Barlow et Becquerel au sujet de la loi de la longueur. Au sujet des expériences de Becquerel, Ohm, — qui n'a encore trouvé que sa loi logarithmique — insiste sur ce que les fils comparés par Becquerel n'ajoutaient que quelques décimètres à la longueur du circuit, supérieure à 20 mètres : l'effet de ce petit accroissement est nécessairement proportionnel à sa longueur, quelle que soit la loi véritable pour le circuit total. « La loi de Barlow est donc, dit Ohm, bien plus exacte

(1) Exemple :

$$\frac{P}{P'} = 10,67 ; \quad \left(\frac{l'}{l}\right)^2 = 10,43.$$

(2) *Jahrb. d. Ch. Phys.* t. XLIV, p. 359-370, 1825. Lettre d'Ohm, p. 370-373.

que celle de Becquerel » et concorde sensiblement avec quelques-unes de ses propres expériences.

18. — A la fin de l'année 1826, un physicien à qui l'on doit de nombreuses recherches d'électrostatique, mais assez peu judicieuses le plus souvent, W. Snow Harris, publiait ([1]) lui aussi des recherches entreprises au moyen d'un thermomètre à air traversé par le fil métallique. Notant qu'on a depuis longtemps remarqué la relation inverse entre l'échauffement et la conductibilité (M. Children, par exemple, avec une large batterie galvanique), il compare les quantités de chaleur dégagées dans des fils divers de même longueur et de même diamètre, *par la décharge d'une batterie de jarres* se déchargeant *à travers une distance explosive toujours la même !* Comme les fils n'étaient ni très longs, ni très fins, (0mm,35 ou 0mm,7 de diamètre), l'énergie de la décharge se partageait inégalement entre l'étincelle et le fil, suivant sa nature, au point de donner 6 avec l'argent et le cuivre, et 72 avec le plomb.

On s'étonne de trouver, pendant longtemps, ses nombres cités dans plusieurs Traités sérieux, à côté de ceux obtenus par des observateurs corrects. Mais, bien que ces nombres ne mesurent pas la conductibilité, leur comparaison a pourtant conduit l'auteur à quelques remarques intéressantes sur l'absence d'influence de la forme cylindrique, ou rubanée, ou divisée en plusieurs fils, pour la même masse de métal sous la même longueur ; Harris paraît avoir reconnu le premier l'influence considérable d'une petite quantité d'un métal dans un alliage ([2]), en particulier ce fait que la conductibilité de l'alliage est souvent moindre que celle des deux composants, et non pas intermédiaire ([3]) ; on sait de quelle importance pratique ont été ces remarques en électro-technique.

([1]) On the relative powers of various metallic substances as conductors of electricity. — *Ph. Trans.* 1827, I, (18-24).

([2]) Étain	36	Cu 8, Sn 1	18
Cuivre	6		
([3]) Or	9	Or 1, Cu 3	15
Cuivre	6	Or 2, Cu 2	20
		Or 3, Cu 1	25

19. — C'est en cette même année 1826 que paraît le mémoire dans lequel Ohm établit enfin la loi véritable de la longueur par des expériences faites au moyen du couple thermoélectrique.

Laissant pour le chapitre suivant, où nous étudierons l'œuvre d'Ohm en détail, les mémoires de cet éminent physicien, constatons seulement qu'ils n'exercèrent pendant une dizaine d'années aucune action hors d'Allemagne. Pouillet en 1829, dans la première édition de son Traité de Physique (1) consacrait aux lois des courants permanents, à la notion de *longueur réduite*, données comme résultant de ses propres recherches, quelques pages, aussitôt traduites dans les *Annales* de Poggendorff (2) sous le titre de « Recherches sur la conductibilité électrique dans différents métaux », et auxquelles Ohm ne fait aucune allusion dans ses mémoires postérieurs. Mais ce n'est qu'en 1837 que parut aux Comptes Rendus le détail des expériences de Pouillet avec toutes les conséquences qu'il tirait de la notion de longueur réduite, comme Ohm l'avait fait auparavant de son côté.

20. — Il est curieux de voir quels scrupules préoccupaient alors les physiciens : critiquant la méthode de Davy, et décrivant la sienne propre, Becquerel reconnaît que ni l'une, ni l'autre n'est « à l'abri de la perte d'électricité qui a toujours lieu (?) quand l'électricité passe d'un conducteur dans un autre. » (p. 76).

On aura une idée de l'incertitude qui régnait sur les pouvoirs conducteurs d'après le tableau suivant que j'emprunte à A. C. Becquerel, en le condensant. (Voir le tableau de la page 20).

« De tous ces résultats, conclut Becquerel il n'y a que ceux qui sont compris dans la seconde et la quatrième colonne qui puissent être comparés ; car les autres présentent des différences trop considérables. Nous le répétons encore, il en sera toujours ainsi, quand on n'opérera pas avec de l'électricité provenant *de la même source*. » Et voilà le second scrupule expérimental, aussi légitime qu'il est ou-

(1) *Eléments de Physique expérimentale*, t. I, p. 754.
(2) *Pogg. Annal.* t. XV, 1829, p. 91-95.

blié, aujourd'hui qu'on le sait inutile : L'électricité qui provient de différentes sources n'a-t-elle point quelque qualité particulière à chaque source ; la lumière, la chaleur, le son en ont bien ! Rien de plus instructif à ce sujet que la longue série de mémoires publiés par un physicien génevois, bien oublié aujourd'hui, Elie Wartman, pour reconnaitre si l'électricité n'est pas un état vibratoire, en essayant par exemple de produire quelque interférence d'action de deux électrodes plongées dans un liquide conducteur.

Nature du métal	Davy électricité voltaïque	Becquerel électricité voltaïque	Cumming électricité thermoïque	Harris électricité ordinaire	Christie électricité d'induction	Pouillet électricité d'un seul couple
Cuivre.	100	100	100	100	100	100
Or	73	93,6	35,2	66,7	110,6	84
Argent.	109	73,6	176,5	100	115,2	116
Zinc	»	28,5	53	33,3	52,2	»
Platine.	18	16,4	21,6	20	24,5	13
Fer.	14,5	15,8	24,3	20	22,3	16
Etain	»	15,5	23,9	16,7	25,3	»
Plomb.	69	8,3	16,8	8,3	12,4	»

21. — Une des questions importantes était encore la suivante : L'intensité du courant le long d'un circuit bien isolé, qui, définie électrostatiquement, est évidemment uniforme sur toute la longueur du circuit, est elle aussi uniforme quand on la définit par les forces magnétiques ? Ne changerait-elle pas de signe à l'intérieur de la pile ?

Fechner, en 1831, constate l'uniformité de la force magnétique le long d'une chaîne de métaux ; Kohlraush, en 1856, fait la même constatation pour l'action d'une cuve à sulfate de cuivre. Colley enfin donne toute la précision possible à la constatation, en formant un galvanomètre différentiel avec un fil de cuivre et un tube plein d'une solution de sulfate de cuivre enroulés côte à côte.

Dans le Mémoire dont nous avons déjà dit un mot, Barlow [1] avait recherché avec le plus grand soin, si l'action magnétique du courant est la même auprès des pôles de la pile et au milieu d'un long circuit, et avait conclu de l'identité observée des trois déviations, à l'absence de fuites, et à la probabilité plus grande de la théorie des deux fluides. Cumming, avait en 1823, remarqué que la déviation de la boussole est de même sens le long du bismuth de la pile thermo-électrique que le long du fil de jonction. Wiedemann enfin fit la même constatation pour la pile hydroélectrique en construisant celle-ci avec un tube de verre un peu long.

Ne sont-ce pas là des exemples frappants de l'origine expérimentale de notions qui sont devenues tellement familières qu'on ne conçoit même plus qu'on ait pu en douter ? Et pourquoi ? Simplement parce que ces vérités péniblement conquises par de longues séries d'expériences se sont condensées dans l'emploi d'un mot unique « courant électrique », et que l'unité de dénomination semble indiquer comme intuitive l'identité des choses que désigne ce nom unique ; illusion utile à l'enseignement élémentaire, mais profondément nuisible à la philosophie de la science.

(1) On the laws of Electro-magnetic Action, as depending on the length and dimensions of the conducting wire, and on the question, whether electrical phenomena are due to the transmission of a single or of a compound fluid. *Ed. Ph. Journ.* t. XII, 182 , 105-114.

CHAPITRE III

OHM

22. — Georges Simon Ohm naquit le 16 mars 1787 à Erlangen ; il paraissait destiné à y exercer, comme ses ascendants depuis un siècle, le métier de serrurier ; son père, Wolfgang Ohm, auquel ses lectures avaient fait comprendre l'utilité de quelques connaissances scientifiques pour sa profession, lui fit suivre les cours du collège ; ses progrès furent si rapides que, sur le conseil du mathématicien Langsdorff, G. S. Ohm entra à l'Université d'Erlangen en 1803. Au bout de trois semestres, il alla dans le canton de Berne, à l'institution de Gottstadt où il passa deux ans et demi, puis à Neufchâtel où il vécut de leçons particulières ; il finit par revenir à Erlangen en 1811 comme professeur agrégé. Très peu de temps après, il fut envoyé à l'école royale de Bamberg, dont la dissolution le laissa sans emploi.

En 1817, après treize années d'une vie incertaine, Ohm fut nommé professeur de mathématiques au grand Collège des Jésuites de Cologne ; c'est là qu'il commença ses recherches expérimentales et théoriques sur le galvanisme.

Après une année de congé passée à Berlin, Ohm publia la « *Théorie mathématique du circuit galvanique* » en 1827, mais sans attirer l'attention ; froissé d'avoir été mal reçu au Ministère quelque temps après, il se démit brusquement de la place qu'il occupait à Cologne, et traîna une existence précaire jusqu'en 1833, époque de sa nomination à l'école polytechnique de Nuremberg comme professeur de Physique, puis comme directeur. Très absorbé par l'enseignement et l'administration, Ohm s'attacha pendant ces

seize années à établir une théorie générale des phénomènes physiques, dont à peu près rien n'a été publié, sauf quelques mémoires d'Acoustique.

Appelé en 1849 à Munich comme conservateur des Collections de physique, en 1852 comme professeur de physique expérimentale, il y publia un intéressant mémoire sur les phénomènes d'interférences dans les cristaux à un axe. Le 7 juillet 1854, il fut emporté par une attaque d'apoplexie. Il laissait à ses collègues de l'Académie des Sciences de Munich le souvenir d'un savant impartial et modeste, resté bienveillant malgré les difficultés de son existence, et toujours simple, même après avoir reçu de la Société Royale de Londres en 1841, la médaille Copley, accompagnée d'un rapport (¹) qui mettait admirablement en lumière l'importance de ses travaux sur les courants électriques.

23. — A l'époque des premières recherches d'Ohm, les piles en usage étaient loin d'avoir une force électromotrice constante et indépendante de leur débit; aussi les résultats s'en ressentaient-ils. Dans son mémoire de 1825 (²), Ohm prend comme source un élément Cuivre-Zinc à auge de $0^{m},33$ de haut sur $0^{m},40$ de long. Deux gros fils partant du cuivre et du zinc aboutissent à des godets de mercure dans lesquels on plonge les extrémités des conducteurs à comparer, qui sont : un pont gros et court (10 centimètres), et 5 fils de 1, 3, 6, $10\frac{1}{3}$ et 23 pieds de longueur, et de 0,3 ligne ($0^{mm},7$ environ de diamètre.

Près d'une partie rectiligne des conducteurs fixes, se trouve une aiguille aimantée suspendue à un fil de torsion, comme dans la balance magnétique de Coulomb. On mesure la force magnétique en intercalant les fils dans l'ordre suivant :

$$\text{pont, } 1, \text{ pont, } 3, \text{ pont, } 6, \text{ pont, } 10\tfrac{1}{3}, \text{ pont, } 23, \text{ pont.}$$

(¹) *Proc. Roy. Soc.* t., IV.

(²) Vorläufige Anzeige des Gesetzes nach welchem Metalle die Contactelectricität leiten. — *Pogg. Ann.* Bd IV, p. 79-88 : et *Jahrb. des Ch. Phys. Schweigger*, t. LXIV, p. 110-118.

D'un grand nombre de séries, Ohm déduit les valeurs moyennes, seules publiées, de la *perte relative* de la force magnétique pour chaque fil, comparé au pont $\left[\text{évidemment } \frac{I_0 - I}{I_0}\right]$, perte que représente très bien (même pour un fil encore plus long) la formule empirique 0,41 log (1 + l), en appelant l la longueur en pouces des fils additionnels,

Fil.	Pont	1	3	5	$10\frac{1}{3}$	23	75
Perte observée.	0	0,12	0,25	0,35	0,43	0,58	0,78-0,75
Formule. . .	0	0,12	0,25	0,35	0,43	0,57	0,77

24. — Soupçonnant que la constante 1 correspond à la partie fixe de son circuit, formée de 4 pieds de gros fil (1',25) qui équivaudraient à 1 pied seulement de fil fin ([1]), il remplace presque tout ce gros fil par du fil fin, ce qui donne pour le circuit fixe $2^p,9$ et une série d'expériences ainsi faites s'accorde très bien avec la nouvelle formule de perte

$$0{,}525 \log\left(1 + \frac{l}{2{,}9}\right).$$

Ayant remarqué que lorsqu'on substitue un fil long au pont, la force magnétique croît pendant une demi-minute au moins, et que l'inverse se produit lorsqu'on remet le pont, ce qui pourrait entraîner une erreur de deux divisions du tambour et même plus (sur 150 au maximum), si l'on faisait les lectures trop tôt, Ohm fait deux nouvelles séries, bien concordantes, avec $4^p,5$ de fil fin en circuit fixe, et la formule de perte qui les représente bien est

$$0{,}452 \log\left(1 + \frac{l}{4{,}5}\right).$$

([1]) On voit qu'Ohm ne soupçonnait pas encore la loi de la section, car

$$4 \times \left(\frac{0{,}3}{1{,}25}\right)^2 = 0{,}23$$

est plus petit que l'unité.

25. — L'expérience établit donc la loi de perte : $m \log \left(1 + \frac{l}{a}\right)$. Cette loi rend bien compte des effets observés par Wollaston, par Gilbert, et du fait remarqué par Poggendorff, que, au delà d'un certain nombre de tours de fil, l'action exercée par un multiplicateur n'augmente plus ; cette action doit même, si on continue à ajouter des tours de fil, décroître indéfiniment.

Le coefficient m dépend du circuit fixe, du diamètre du conducteur, et probablement de la tension de la pile. Un premier aperçu sur les changements de la pile, conduit Ohm à un énoncé paradoxal [1], remplacé dans une addition [2] par les deux énoncés suivants, qui sont exacts :

1. La *force électrique* (électromagnétique) est, pour chaque conducteur, maximum au premier instant de la fermeture de la pile, puis décroit et atteint un minimum, en supposant invariable le conducteur liquide. Quand on ouvre le circuit pendant longtemps, elle reprend sa valeur primitive.

2. Ce minimum est beaucoup moins différent de la valeur initiale avec les longs conducteurs qu'avec les courts (à égalité de diamètre). Ce qui explique plusieurs faits connus relatifs à l'incandescence des fils à la Wollaston par la pile.

26. — Tel est ce premier mémoire [3] d'Ohm, uniquement expérimental. Faute d'une pile constante, deux actions indépendantes, la résistance des conducteurs, la polarisation de la pile pour un débit déterminé, liées seulement par une technique invariable, conduisent à une loi unique dont Ohm ne pouvait rien tirer. Sachant ce qu'Ohm lui-même nous apprendra bientôt, nous pouvons écrire, pour chaque état permanent de la pile associée à un conducteur l

$$E = I \rho (a + l)$$

(1) P. 86, Enoncé en italiques.

(2) P. 87-88.

(3) Je laisse de côté une digression sur la manière de régénérer la mousse de platine épuisée.

où E est la force électromotrice fonction de I, et ρ un facteur constant. Or l'expérience a donné

$$\frac{I_0 - I}{I_0} = m \log\left(1 + \frac{l}{a}\right)$$

on a donc

$$m \log\left(\frac{E}{E_0} \cdot \frac{I_0}{I}\right) = \frac{I_0 - I}{I_0}.$$

D'où l'on tire facilement la loi de polarisation de la pile employée par Ohm, en fonction de l'intensité qu'elle fournit

$$E = A I e^{-\alpha I}$$

loi très différente de celle qu'il adoptera, cinq ans plus tard, comme conséquence de nouvelles expériences et des travaux de Fechner :

$$E = E_0 - \alpha I.$$

et qui elle-même, n'est qu'une première approximation de la loi véritable, trouvée par Crova (*Ann. ch. et phys.*, t. LXVIII, 1863 et t. IV, 1865).

$$E = A - Be^{-\alpha \frac{I}{S}}$$

et généralisée par Bartoli (*N. Cim.*, 1880) en séparant le rôle des deux électrodes

$$E = A_1 - B_1 e^{-\alpha_1 \frac{I}{S_1}} + A_2 - B_2 e^{-\alpha_2 \frac{I}{S_2}}$$

27. — Ce même volume de Schweigger contient l'analyse des travaux de Becquerel, de Barlow, avec des remarques de Schweigger et d'Ohm à ce sujet (¹), ainsi qu'un ordre de conductibilité des métaux par Ohm (*Lettre*, p. 245).

L'année suivante (²), constatant le désaccord de ses résultats avec

(¹) Voir Ch. précédent.

(²) Bestimmung des Gesetzes, nach welchem Metalle die Contactelectricität leiten, nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des Voltaischen Apparates und des Schweiggerschen Multiplicators. — *Jahrb. der Ch. Ph. Schweigger*, t. XLVI, 1826, p. 137-166.

ceux de Barlow et ceux de Becquerel, qui viennent de paraître, Ohm reprend la question en perfectionnant sa technique. Il note d'abord que sa pile à auges, fermée en court circuit, décroît lentement pendant plus de deux heures, et remonte lorsqu'on ouvre le circuit. Pour éviter ces grandes variations, il laisse d'abord la pile baisser considérablement avant de commencer les mesures, et quand la variation est devenue très lente, il n'ouvre plus le circuit; il met le nouveau fil en dérivation dans les godets de mercure, avant d'enlever le premier.

Il détermine les longueurs équivalentes de différents métaux sous le même diamètre.

Puis il cherche la loi de la section sur des fils de diamètres compris entre $0^l,12$ et $1^l,40$ et obtient le résultat suivant : « des conducteurs cylindriques de même nature et de différents diamètres ont « même conductibilité lorsque leurs longueurs sont proportionnelles « à leurs sections droites : loi déjà obtenue par Barlow et par Becquerel dans leurs recherches. » Les plus gros fils s'en écartent bien un peu, mais cela est attribué par Ohm à l'état de leur surface.

Tout cela tient en dix-sept lignes, sans un seul nombre justificatif. C'est que la loi de la section pouvait être regardée comme acquise par les mémoires de Davy et de Becquerel; c'est sur la loi de la longueur à égale section que portait le désaccord, c'est cette loi qui fait le principal objet du mémoire d'Ohm.

28. — Pour cette recherche, dans laquelle le circuit extérieur est variable, Ohm abandonne l'emploi, trop peu sûr, de la pile à auges et recourt, sur le conseil de Poggendorf, à la pile thermoélectrique Cuivre-Bismuth, associée à la balance de torsion magnétique comme le montre la figure 2, exacte reproduction de celle d'Ohm, qui s'explique d'elle-même. *ab b'a'* est le bismuth, dont les branches verticales sont fixées au cuivre chacune par deux vis. Ces deux branches verticales sont maintenues l'une à 100°, l'autre à zéro, au moyen d'étuves de laiton à double paroi, sans contact avec la vapeur ou la glace.

De la description détaillée donnée par Ohm, j'extrais seulement

ceci : l'aiguille aimantée est supportée par un ruban d'or plat [1], préférable au fil de torsion rond, surtout pour la fixité du zéro, même après une torsion de trois tours entiers sur une longueur de 75 centimètres seulement ; l'extrémité de l'aiguille, visée à la loupe, était ramenée au zéro à $\frac{1}{40}$ près, ce qui correspondait à $\frac{1}{4}$ de division du tambour supérieur de torsion.

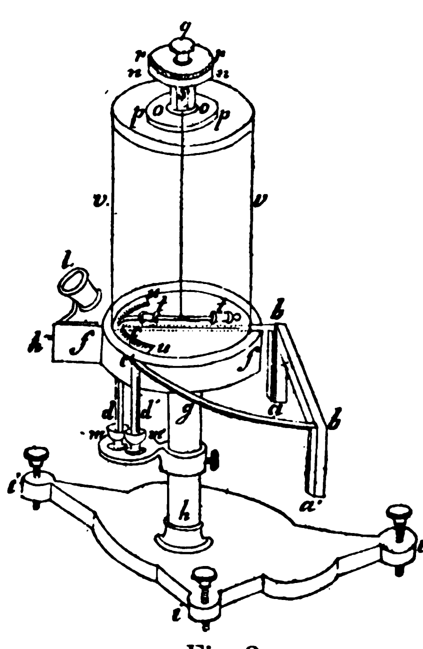


Fig. 2

Après quelques semaines d'usage, la pile thermoélectrique est devenue parfaitement constante. Pendant le passage du courant, l'aiguille aimantée reste fixe indéfiniment, au lieu de subir ces mouvements irréguliers qu'on observe avec les piles à liquides.

A titre d'exemple, voici deux séries de mesures (15 janvier) :

Longueur des fils	Torsions observées		Calculées
x pouces	(IV)	(V)	$6800 : (x + 20\,^1/_4)$
2	305 $^1/_4$	305	305 $^1/_2$
4	281 $^1/_2$	282	280 $^1/_2$
6	259	258 $^1/_4$	259
10	224	223 $^1/_2$	224 $^3/_4$
18	178 $^1/_2$	178	177 $^3/_4$
34	124 $^3/_4$	124 $^3/_4$	125 $^1/_4$
66	79	78	79
130p $^7/_8$ l.	44 $^1/_2$	44	45

(1) On sait en outre depuis Saint-Venant que le moment de torsion est considérablement moindre pour le fil laminé.

Plusieurs autres ne sont pas moins bonnes. La force magnétique est donc bien donnée par la formule

$$X = \frac{a}{b + x}.$$

Dans les piles à liquides, la force électromotrice a (die erregende Kraft) est incomparablement plus grande que dans les piles thermo-électriques [1] et b n'est comparable que grâce à l'énorme surface des électrodes de la pile à liquide.

Cette formule est d'accord avec celle qu'a obtenue Becquerel pour de petites variations relatives de x par rapport à b, qui comprenait la résistance du galvanomètre multiplicateur.

29. —Ainsi en possession de la loi de la résistance des conducteurs, Ohm en poursuit immédiatement les applications théoriques : j'en donnerai seulement les énoncés abrégés.

L'intensité du courant fourni en court circuit par un nombre quelconque d'éléments Volta en série est la même que celle d'un seul élément ; mais si les éléments sont montés en parallèle, l'intensité est proportionnelle à leur nombre.

L'intensité du courant fourni sur un circuit très résistant par des éléments en série est sensiblement proportionnelle à leur nombre.

Dans les autres cas elle est intermédiaire ; il cite à ce sujet des observations de Bischof.

Puis il discute le nombre de tours de fils du multiplicateur eu égard à la résistance du reste du circuit, et montre l'existence du maximum d'action, dépendant du nombre d'éléments de pile employés, de leurs dimensions, etc., d'une manière tout à fait conforme aux observations antérieures publiées par Poggendorf sur ce sujet (1821), et dont Nobili n'avait rien soupçonné.

[1] En note, p. 156, Ohm indique l'énoncé de Davy : « Conductibilité proportionnelle à la masse du fil » ; en oubliant d'ajouter, « sous la même longueur » ce qui le rend faux. Il cite l'intéressante expérience de comparaison entre le fil rond et le fil laminé. V. p. 14 ci dessus.

30. — Quelques mois plus tard [1], Ohm annonce qu'il a été assez heureux pour déduire, avec l'aide des mathématiques, de la notion connue et fondamentale de *tension électrique* (electrische Spannung) *entre deux corps différents*, deux lois relatives à l'état intérieur des corps qui subissent l'action de la pile électrique.

« Ces lois paraissent définir complètement le phénomène dans les conducteurs solides; pour les liquides de la pile Ohm se réserve encore. Dans cette publication il énonce seulement ces lois, et en tire les conséquences principales pour les courants constants et uniformes, sous la forme même qui est devenue classique depuis.

« Ces deux lois fondamentales sont [2]

$$(a) \qquad X = kw\frac{a}{l},$$

$$(b) \qquad u - c = \pm\frac{x}{l}a,$$

k, pouvoir conducteur de la matière;

l, longueur du conducteur prismatique homogène;

w, section droite;

a, tension électrique entre ses extrémités;

x, distance comptée sur le fil à partir d'une section arbitraire;

X, force (Stärke) uniforme du courant électrique tout le long du conducteur;

u, intensité de l'électricité qui agit sur l'électromètre au point *x*;

c, une quantité indépendante de *x*. »

L'équivalence des fils de longueur proportionnelle à leur section droite a été découverte « d'abord par Davy, plus tard par Barlow, Becquerel et moi [3] », toutefois pour des fils qui ne constituaient qu'une petite partie du circuit total.

(1) Avril 1826. — Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten electroscopischen Erscheinungen. — *Pogg. Ann.* VI, 459-469, et VII, 45-54.

(2) P. 460, *l. c.*

(3) *Loc. cit.*, p. 463. Je n'ai rien vu de si précis dans Barlow.

« *k* définit la conductibilité spécifique de la même manière que les expériences de Becquerel et les miennes. » Toutefois, l'observation que j'ai faite (sur l'argent) que des conducteurs de même nature chimique n'ont pas toujours la même conductibilité semble indiquer l'existence de quelque autre influence. « Quant à la loi (*b*), elle a été déduite par moi antérieurement de nombreuses observations soignées faites au moyen de la pile thermoélectrique, publiées au *Journal* de Schweigger » avec des applications variées.

A ces appréciations historiques il semble qu'il n'y ait rien à changer aujourd'hui : l'importante loi de la section a bien été découverte par Davy, mais mal énoncée ; la relation avec les actions électroscopiques et toutes les fécondes applications de ces deux lois réunies sont dues, sans conteste, à Ohm.

31. — Voici un sommaire très succinct de ces conséquences théoriques :

A. — *Phénomènes électroscopiques dans un circuit simple.* — Notons que Ohm précise les circonstances extérieures qui influent sur la constante *c*, suivant que le circuit est entièrement isolé, ou est, par exemple, en communication parfaite par un de ses points avec le sol. Eléments associés en tension ; influence de la résistance du circuit extérieur comparée à celle de la pile. Tensions électroscopiques le long de la pile, en supposant qu'à chaque lieu de développement d'électricité tout le changement de tension de la pile se produit brusquement; tensions dans le conducteur liquide. Etat d'un circuit qui contient deux piles en opposition.

Le mois suivant, Ohm écrit à Poggendorf que l'expérience a confirmé ses déductions théoriques [1]. Une pile à colonne de cent disques, fermée par un fil de laiton de 300 pieds et d'un sixième de ligne de diamètre, ne donnait entre ses pôles qu'une tension à peine sensible à l'électroscope condensateur et comparable à celle d'un seul élément ouvert. En remplaçant le fil de laiton par un fil de fer très

[1] Ein Nachtrag zu dem vorstehenden Aufsatz des H. D. Ohm. — *Pogg. Ann.*, t. VII, 117.

fin (n° 15) de même longueur, la distribution devint sensible même sans condensateur : Avec une pile à tasses de douze petits éléments, réunis par le même fil de fer, une extrémité mise au sol, l'autre extrémité « explorée au moyen d'un électromètre, sans condensateur, très sensible » lui donnait une impulsion.

Ceci fixe bien la définition expérimentale de la *tension* de Ohm.

L'exploration du liquide intérieur de la pile a donné des singularités.

32. — Toujours soucieux de contrôler ses vues théoriques, Ohm publie au début de 1827 de nouvelles recherches expérimentales [1]. Il s'agit de la loi des sections droites de Davy, d'après laquelle « l'électricité, pendant qu'elle parcourt les corps, est également répartie entre toutes leurs parties. » Cette propriété paraît si opposée à la distribution superficielle de l'électricité en repos, qu'une nouvelle preuve expérimentale n'est pas superflue.

Avec sa pile thermoélectrique et son galvanomètre de torsion, Ohm compare d'abord un fil de laiton de 16 pouces 4 lignes de longueur avec un autre bout de même longueur laminé jusqu'à être sept fois plus large qu'épais, et il trouve $129\frac{1}{2}$ pour l'intensité avec le fil rond, $132\frac{1}{2}$ avec le fil aplati ; ces deux nombres doivent être regardés comme sensiblement égaux. Toutefois il perfectionne les prises de contact avec ses godets de mercure, pour être assuré d'opérer toujours sur les mêmes longueurs ; et opérant sur 8 fils identiques placés côte à côte, puis sur 3 fils différents combinés en dérivation de toutes les manières, Ohm trouve l'observation et la théorie d'accord à moins de deux divisions près du tambour de torsion sur un total de 100 à 300 divisions ; ayant constaté cette concordance étroite, il ajoute : « on voit combien la loi que j'ai établie diffère de celle trouvée par Davy et confirmée par Becquerel ; et on pourrait encore exagérer cette différence en changeant les dimensions du circuit ». Cette différence n'existe que dans l'imagination d'Ohm.

(1) Einige electrische Versuche. — *Jahrb. der Chem. Ph. Schweigger*, XLIX, 1827 p. 1.

33. La théorie mathématique du circuit galvanique [1]. — Le livre d'Ohm débute par une INTRODUCTION, longue de plus de 30 pages, dans laquelle l'énoncé des principes qu'il a découverts est appliqué à l'étude géométrique et algébrique des courants constants. C'est une forme perfectionnée et complétée du mémoire de 1826.

Viennent ensuite trois chapitres :

CHAPITRE A. — Considérations générales sur la propagation de l'électricité.

CHAPITRE B. — Phénomènes de tension.

CHAPITRE C. — Phénomènes de courant.

APPENDICE. — Sur les actions chimiques qui se produisent dans le circuit galvanique et sur les variations d'intensité qui en sont la conséquence.

34. — Sans analyser cette œuvre en détail, prenons-y quelques citations qui nous renseigneront bien sur le vrai point de vue d'Ohm.

Premier principe. — Distribution de l'électricité dans l'intérieur d'un seul et même corps : « Je suis parti de la supposition qu'une molécule électrisée ne peut communiquer d'électricité qu'aux molécules contiguës, de telle sorte qu'il n'y a jamais d'échange immédiat entre des molécules situées à une plus grande distance. »

Deuxième principe. — Dispersion de l'électricité dans l'atmosphère ambiante. « J'ai adopté la loi que Coulomb a déduite de ses expériences »... « dans le cas d'un circuit galvanique, comme l'électricité circule en très grande partie dans l'intérieur des corps, il n'y en a qu'une très petite partie qui soit soumise à l'action de l'air, de sorte que la dispersion est comparativement très petite et n'intervient que rarement dans les expériences. »

Troisième principe. — Mode de développement de l'électricité au

[1] *Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet*, von Dr G. S. Ohm. Berlin, 1827, bei Riemann.

En anglais, traduit par WILLIAM FRANCIS, étudiant en philosophie de l'Université de Berlin, dans *Scientific Memoirs*... edited by Richard Taylor F. S. A Vol. II, 1841, p. 401-436 et 437-506.

En français, Traduction, préface et notes par GAUGAIN, 1860, MALLET-BACHELIER.

point de contact de deux corps hétérogènes. « La *force électromotrice* se trouve définie par le principe suivant : Quand deux corps différents se touchent, il s'établit au point de contact une différence constante entre leurs tensions. »

« Ces deux dernières lois sont purement expérimentales, mais la première est, en partie du moins, hypothétique. »

« Les équations que l'on obtient sont de la même forme que celles qui ont été établies par Fourier et Poisson pour la propagation de la chaleur, et elles peuvent être traitées d'une manière analogue... »

35. — Les altérations chimiques qui se produisent dans les parties liquides du circuit compliquent le phénomène et en cachent la vraie nature ; « j'ai donc étudié séparément les circuits galvaniques qui n'éprouvent d'altération chimique dans aucune de leurs parties » et consacré un appendice aux autres... « Pour qu'une théorie soit utile et durable, il faut que toutes ses conséquences soient d'accord avec l'observation et l'expérience ; or, en ce qui concerne la première classe de circuits ci-dessus mentionnés, cet accord est suffisamment établi, ce me semble, soit par les expériences antérieures d'autres observateurs, soit par celles que j'ai moi-même exécutées : *ce sont ces expériences qui m'ont fait découvrir la théorie que je développe ici et qui m'ont ensuite déterminé à m'y consacrer entièrement.* Il n'en est plus de même pour les circuits de la seconde classe... ; j'ai donc pris le parti de reléguer dans un coin cette classe de circuits... »

36. — Même en faisant abstraction de la tradition acquise, il est facile à ceux qui ont suivi les travaux expérimentaux d'Ohm, de voir par quelle élaboration latente il a été conduit à l' « hypothèse » qui forme son premier principe ; peut-être peut-on regretter qu'il n'ait pas rappelé formellement au début de son livre le fait expérimental, qui impose son hypothèse, celui de la participation uniforme de toute la section au passage du courant ; fait qui a tant étonné les physiciens d'alors et qui surprend encore tellement tous ceux qui ont été d'abord familiarisés avec l'électrostatique, même quand on ne prend pas

plaisir à jeter le trouble dans leur esprit en y ajoutant dès le début la proposition paradoxale de Kirchhoff sur la densité nulle de l'électricité dans le conducteur. Une des phrases citées plus haut et tout le reste du livre montre clairement que Ohm regardait la densité de l'électricité comme finie dans le conducteur ; nous y reviendrons.

Notons encore, que tout en excluant de ses raisonnements certains les régions où se produisent des actions chimiques, Ohm traite de la pile de Volta, de sa résistance intérieure, etc. ; tous ses raisonnements sont corrects, pourvu que la force électromotrice de la pile et sa résistance intérieure soient constantes ; mais il ne soupçonne pas encore la liaison entre la *force décomposante* et la force électromotrice.

37. — Il paraît inutile de résumer l'Introduction ; ce sont toutes les propriétés classiques des circuits simples dans l'état permanent, exposées en faisant le plus large usage de la représentation géométrique linéaire des tensions le long des circuits avec les sauts brusques aux points de contact hétérogènes, en insistant sur ce fait que la position de la ligne brisée représentative n'est complètement déterminée que lorsqu'on sait quel point est en communication avec le sol. Quant à la différence entre les effets des piles thermoélectriques et ceux des piles hydroélectriques (constantes) sur les mêmes conducteurs extérieurs, elle provient uniquement de ce que la force électromotrice et la résistance des premières sont beaucoup plus petites que celles des secondes.

38. — Au début du Chapitre A, Ohm définit la tension de l'électricité au moyen de l'électroscope, d'une manière qui, malheureusement, manque de netteté (¹) ; et après quelques réflexions sur le rôle utile des hypothèses mathématiques, il énonce ses hypothèses : « Quand deux éléments électriques E et E′ d'égale grandeur et de même forme, sem-

(¹) « On détermine la force avec laquelle l'électroscope est repoussé ou attiré par le corps avec lequel on l'a mis en relation (Verbindung) ; cette force sera appelée force électroscopique du corps A. »

blablement placés l'un par rapport à l'autre, mais doués de tensions inégales, sont situés à une distance convenable l'un de l'autre, ils manifestent une tendance mutuelle vers l'état d'équilibre, ils vont continuellement en se rapprochant de la moyenne de leurs tensions, jusqu'à ce qu'ils l'aient atteinte, c'est-à-dire que l'état électrique des deux éléments se modifie aussi longtemps qu'il existe une différence entre leurs tensions, et que cet état devient invariable quand les deux éléments sont arrivés à la même tension ; par conséquent, la variation de l'état électrique et la différence des tensions sont deux quantités liées entre elles, de telle manière qu'elles disparaissent en même temps ; nous admettrons que la variation de tension que les deux éléments subissent dans un instant extrêmement court est proportionnelle à la différence des tensions actuelles des éléments et à la grandeur du temps écoulé... »

39.— Remarquons de suite qu'il s'agit là d'une hypothèse analogue à celle de Fourier en chaleur, mais bien moins naturelle. En chaleur, c'est un fait que l'échange se fait graduellement par rayonnement entre deux corps éloignés, et l'hypothèse de Fourier n'est pour ainsi dire que la réduction microscopique du fait d'observation. En électricité, rien de semblable : deux corps électrisés en présence, à distance un peu grande, dans l'air, n'échangent rien, à proprement parler ; chacun d'eux conserve sa charge, ou la perd d'une manière indépendante, par des fuites, c'est-à-dire quelque chose de très mal défini et de très confus ; ce n'est qu'à très petite distance que l'échange se produit, et cela d'une manière discontinue, par aigrette ou par étincelle ; le phénomène directement observable sur des corps de dimensions finies est donc très différent du phénomène moléculaire hypothétique en électricité ([1]).

40. — « Nous avons admis, conformément à toutes les observations faites jusqu'ici (?), que lorsque deux éléments qui ont les mêmes formes

([1]) A certains égards, une difficulté analogue peut être soulevée pour l'hypothèse de Fourier ; la réduction hypothétique aux dimensions moléculaires, qui sont bien plus petites que les longueurs d'onde, est tout à fait arbitraire et sans justification ; je m'occuperai ailleurs des échanges de ce genre. M. B.

extérieures réagissent l'un sur l'autre, de manière à modifier réciproquement leur état électrique, l'un perd en tension précisément autant que l'autre gagne, aussi bien lorsque les deux éléments sont de nature différente, que lorsqu'ils sont de même nature ; si l'expérience venait à démontrer plus tard que les corps possèdent une propriété analogue à celle que, dans la théorie de la chaleur, on appelle capacité, la loi que nous avons établie devrait subir une légère modification que nous indiquerons à l'endroit convenable. »

« Lorsque les deux éléments E et E' ne sont pas de même grandeur, il est permis de les regarder comme des sommes formées de parties égales... » ; raisonnement exclusivement géométrique. « D'après cela il est évident que l'expression qui représente l'action mutuelle de deux éléments dissemblables, doit être proportionnelle non seulement à la différence des tensions et au temps écoulé, mais aussi au produit des volumes relatifs des éléments ; à l'avenir, nous désignerons par un nom particulier la somme des tensions rapportée à la grandeur des éléments (ce n'est pas autre chose que le produit de la tension par la grandeur de l'espace sur lequel l'électricité se trouve répandue, quand la tension est partout uniformément répartie). Pour désigner cette grandeur, nous nous servirons de l'expression quantité d'électricité... »

41. — « La conductibilité k établie entre deux points est une grandeur proportionnelle au produit que l'on obtient en multipliant la quantité d'électricité q transmise en un certain temps d'un point à l'autre par la distance s qui sépare les deux points. »

Ces hypothèses et définitions ont pour conséquence presque immédiate la formule

$$q = k \frac{u' - u}{s} dt$$

en appelant u et u' les tensions des deux éléments de volume entre lesquels se fait l'échange.

42. — Laissant de côté une digression sur la préférence accordée

à la méthode de Fourier sur celle de Laplace, nous arrivons en partant de ces principes, à la définition du courant électrique S

$$(b) \qquad S = k\omega \frac{du}{dx},$$

et par des raisonnements bien connus, à l'équation de propagation dans le fil cylindrique

$$(a) \qquad \omega\gamma \frac{du}{dt} = \omega k \frac{d^2u}{dx^2} - bcu$$

ω, est la section droite du fil ;
c, est le périmètre du fil ;
b, un coefficient qui dépend de l'état actuel de l'atmosphère.

43. — Quant à γ, il importe de citer sa définition, car Kirchhoff a eu à rectifier Ohm sur ce point, et Ohm avait laissé entre le galvanisme et l'électrostatique un profond fossé :

« La variation totale qu'éprouve dans l'élément de temps dt, la tension u du disque M est

$$\frac{du}{dt} dt ;$$

par conséquent la variation totale qu'éprouve dans le temps dt la quantité d'électricité appartenant au disque M est

$$\omega \frac{du}{dt} dt ;$$

quand toutefois on admet que des changements égaux de tension correspondent toujours à des variations égales de quantité. Si l'expérience venait à démontrer qu'une même quantité d'électricité fait éprouver à des corps différents de même volume des changements de tension différents, alors il faudrait encore introduire dans l'expression précédente un coefficient γ relatif à cette propriété des divers corps ; jusqu'à présent l'expérience n'a pas prononcé relativement à

cette propriété dont on est conduit à soupçonner l'existence par la manière dont se comporte la chaleur ».

On le voit, Ohm n'a pas un instant soupçonné le caractère superficiel de cette capacité, et son origine électrostatique ; il s'est borné à introduire ce terme par analogie avec la chaleur, supposant la capacité par unité de *volume* caractéristique de la nature du corps. De ce fait, l'œuvre d'Ohm est restreinte aux courants permanents.

44. — A la surface de contact de deux corps, les équations de continuité sont

$$(u) - (u') = a$$

et

$$k\omega \left(\frac{du}{dx}\right) = k'\omega' \left(\frac{du'}{dx}\right)$$

ou, s'il y a deux branches dérivées :

$$(u) - (u') = a, \qquad (u) - (u'') = a'$$

avec

$$k\omega \left(\frac{du}{dx}\right) = k'\omega' \left(\frac{du'}{dx}\right) + k''\omega'' \left(\frac{du''}{dx}\right).$$

45. — Dans le CHAPITRE B, l'étude des courants permanents est reprise, sous forme purement algébrique, pour un circuit homogène, puis pour un circuit formé d'un nombre quelconque de parties en série.

A cette occasion, la notion actuelle de résistance est introduite sous le nom de *longueur réduite*.

Puis Ohm arrive au cas d'un circuit mis en communication avec un condensateur.

Il y a ici une idée fausse, rectifiée par Kirchhoff, qu'il importe de mettre en évidence.

« Soit r l'*espace* sur lequel l'électricité se trouve répandue dans un circuit galvanique donné », u la tension d'un point en communication avec un corps M indépendant du circuit, u' la tension de ce point avant la communication ; la variation de tension $u' - u$ est

commune à tous les points du circuit, qui perd par conséquent une quantité d'électricité $r(u' - u)$.

Supposons maintenant que dans l'état d'équilibre la tension de l'électricité soit uniforme dans le corps M, où elle occupe l'espace R, on aura

$$Ru = r(u' - u)$$

si le contact ne développe pas de force électromotrice.

Après une application au condensateur, le paragraphe se termine ainsi :

«... Les considérations théoriques aussi bien que les expériences qui ont été exécutées sur le courant électrique ne laissent aucun doute sur ce point, que l'électricité en mouvement pénètre dans l'intérieur des corps, et que sa quantité est en rapport avec leur volume. D'un autre côté, il est également certain que l'électricité en repos s'accumule à la surface des corps et que sa quantité dépend de leur étendue superficielle. Il résulterait de là que, *dans les formules qui précèdent, r représenterait le volume du circuit galvanique, quand celui-ci serait fermé, et son aire superficielle quand il serait ouvert*. Il n'y aurait pas, ce me semble, de grandes difficultés à constater ce fait par expérience. »

On ne saurait être plus explicite, et l'erreur est manifeste ; mais il ne faut pas oublier que si les mémoires de Poisson étaient déjà anciens, le mémoire fondamental de Green (1) n'était pas encore paru.

Quant à l'état permanent avec fuites, et à l'état variable, Ohm se borne en réalité à transposer les formules de Fourier pour l'armille.

46. — Au CHAPITRE C, les phénomènes de courant permanent, sans fuites, la théorie des courants dérivés, celle de l'association des éléments de pile en série ou en quantité, celle du maximum du galvanomètre sont étudiés analytiquement.

(1) *Essay on the application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. NOTTINGHAM, 1828 ; et J. DE CRELLE.

Enfin le courant permanent S avec fuites est donné sous la forme exponentielle connue en fonction de x et aussi sous une autre forme intéressante

$$S^2 = C^2 + k\omega.\ b.\ c.\ u^2$$

en fonction de la tension u.

47. — Dans l'Appendice, Ohm cherche par des considérations hypothétiques, qui devaient paraitre acceptables de son temps, à déterminer la force de translation du courant, sa force décomposante, la force d'affinité et la force de réaction ainsi que la loi de conductibilité des mélanges. Il obtient ces deux conséquences : la longueur réduite de la partie du circuit où la décomposition s'opère est invariable; l'intensité du courant S avant qu'aucune action chimique se soit produite, et l'intensité S′ quand l'action chimique est arrivée à l'état permanent sont liées par l'équation

$$S' = S - \frac{\lambda}{L}.\Phi.\ (S' + \psi.\ \omega.\ \alpha)$$

L, étant la longueur réduite de tout le circuit ;

ω, la section droite de la partie liquide du circuit ;

Φ, un « coefficient de force électromotrice » (n° 38 du livre d'Ohm) ;

ψ, une fonction assez complexe (définie au n° 35) ;

et α, une densité (n° 32).

Ces deux lois, tout hypothétiques qu'elles soient, vont jouer un rôle important dans toutes les recherches ultérieures d'Ohm, et lui servir de guide pour l'interprétation de ses expériences sur les piles.

48. — Les théories d'Ohm ne devinrent pas immédiatement familières aux physiciens.

Il dut fournir des explications à Pfaff d'Erlangen, rectifier des citations de Berzélius, relever des critiques de Pohl (1).

(1) Nachträge zu Ohm's mathematischer Bearbeitung der galvanischen Kette ; Sendschreiben des Dr G. S. Ohm, Prof. zu Berlin, an den Hofrath Pfaff, Prof. zu Erlangen. — *Archiv. für die gesammte Naturlehre*. Kastner, XIV, 1828, p. 475-493.

A la suite d'un mémoire de Schweigger en 1828, Ohm revint sur la théorie du multiplicateur (¹), entrant dans le détail, et vérifiant au moyen de multiplicateurs variés toutes les conséquences extrêmes et plus ou moins paradoxales de la théorie relativement à l'influence du nombre de tours de fil, de la grosseur du fil, de sa nature, etc., suivant la pile employée.

49. — D'autres questions le préoccupaient ; en particulier celle de la chaleur dégagée par le courant dans les fils conducteurs (²). Malheureusement, il ne remarque pas que l'échauffement du fil, étant indépendant du sens du courant, doit être vraisemblablement une fonction paire de l'intensité ; et bien que « les expériences de Children semblent indiquer que le coefficient dont dépend l'échauffement ne fait qu'un avec le coefficient de conductibilité », il le traite comme distinct, et cherche à expliquer toutes les observations antérieures en « exprimant par I : χ l'état d'échauffement des corps ». Cela vicie toute la première moitié de ce mémoire, bien qu'il retrouve au moins qualitativement un grand nombre de faits connus.

De ce sujet il passe sans interruption à des considérations qu'il paraît impossible et inutile de résumer sur les fuites par les pointes dans l'air ou dans les électrolytes. C'est l'époque où les moyens de travail expérimental faisaient tout à fait défaut à Ohm, et le caractère de ses hypothèses s'en ressent.

50. — Continuant à réfléchir à l'objet de son Appendice, Ohm réussit à simplifier beaucoup son hypothèse, en la rattachant à celle qui a servi de point de départ à sa théorie de la conductibilité (³).

(¹) Experimentale Beiträge zu einer vollständigen Kenntniss des electromagnetischen Multiplicators. — *Jahrb. der Ch. Phys. Schweigger*, t. LV, 1829, p. 1-74.

(²) Theoretische Herleitung des Gesetze nach welchen sich das Erglühen von Metalldrähten durch die galvanische Kette richtet, und nähere Bestimmung der Modification die der electrische Strom durch den Einfluss von Spitzen erleidet ; — *Archiv. f. d. ges. Naturlehre*, Kastner, XVI. 1829, p. 1-53.

(³) Nachweisung eines Überganges von dem Gesetze der Electricitätsverbreitung zu dem der Spannung. — *Archiv. für die gesammte Naturlehre*. Kastner, t. XVII, 1829, p. 1-25.

Imaginons que les deux éléments entre lesquels se fait l'échange d'électricité possèdent, « outre les tensions variables u et u' qui dépendent de l'état électrique, des tensions v, v', invariables tant que la nature foncière des éléments reste la même, agissant d'ailleurs à distance suivant les mêmes lois que u et u', et intervenant de même dans l'échange d'électricité » la quantité d'électricité échangée en dt entre les deux éléments sera

$$q = k \frac{u' + v' - u - v}{s} dt.$$

Dans un conducteur homogène ($v' = v$) cela ne change rien aux conclusions antérieures ; mais à la surface de séparation de deux conducteurs différents v' et v sont différents pour les deux éléments situés de part et d'autre de la surface, et comme leur distance s est infiniment petite, le numérateur doit l'être aussi ; donc $u' + v' = u + v$, ce qui conduit à l'énoncé suivant [1] : « Lorsque deux corps différents de forme quelconque se touchent en un point, il apparait dans les deux corps, des deux côtés de la surface de contact, des « électricités libres dont la différence est égale à la différence des électricités liées appartenant à ces corps ». Ainsi s'introduit par une hypothèse simple la propriété des surfaces de contact.

Mais Ohm ne fait pas remarquer que la forme même de son hypothèse lui donne la loi des tensions de Volta, mais ne se concilie pas avec l'existence des piles thermoélectriques (puisque $\sum (v - v')$ est évidemment nul dans tout circuit fermé), ni même avec celles des piles à action chimique, à moins d'interpréter avec subtilité la réserve de l'énoncé initial : « tant que la nature foncière des éléments reste la même. ».

51. — Quelques mois plus tard [2], Ohm rattache cette hypothèse aux idées moléculaires d'Ampère, en attribuant aux atomes une force

(1) P. 14. On remarquera que le langage n'est pas bien fixé ; Ohm désigne u et u' tantôt sous le nom de « electrische Kraft », tantôt sous le nom de « freie Electricität » ; de même pour v et v'.

(2) Ergänzender Nachtrag zu dem in diesem Archive erschienenen Aufsatze. — *Archiv. für d. ges. Naturlehre*, Kastner, Bd XVII, 1829, p. 453-461.

déterminée, capable d'attirer et de repousser les électricités opposées qui sont dans son voisinage. Tout atome qui n'est pas neutre attire une électricité et repousse l'autre ; et s'il est impénétrable à l'électricité, il demeure entouré d'une atmosphère électrique qui le neutralise. Cet état dans lequel chaque atome est neutralisé par son atmosphère, est l'état naturel ; lorsque le corps exerce une action électrique au dehors, les atmosphères ne compensent plus exactement l'action atomique. Le corps qui par le contact avec un autre s'électrise positivement, est celui dont l'électricité liée est la plus négative.

52. — Fechner, qui avait fait des expériences extrêmement soignées sur les lois des courants, exposa la théorie d'Ohm dans le troisième volume de la traduction de la Physique expérimentale de Biot, et Ohm y ajouta un supplément (1829) qui parut à part l'année suivante (1830) [1], pour discuter quelques-unes de ces expériences, en particulier celles effectuées par Fechner sur des piles eau acidulée chlorhydrique, zinc-cuivre, zinc-étain, étain-cuivre, pour différentes distances des plaques, et différentes longueurs des circuits extérieurs. Après avoir discuté l'ordre de grandeur des erreurs de mesure de la force magnétique par la méthode des oscillations, Ohm montre que les divergences *énormes* trouvées par Fechner entre les forces magnétiques observées et calculées, ne correspondent en réalité qu'à des erreurs de l'ordre de 0"2, sur les durées d'oscillation des aiguilles aimantées et rentrent par conséquent presque complètement dans les incertitudes expérimentales, bien qu'une allure un peu systématique permette d'y retrouver la variation progressive de la force électromotrice depuis la fermeture du circuit.

Puis une étude expérimentale [2] approfondie de la conductibilité unilatérale du savon, de l'albumine, de diverses flammes découverte par Erman, lui fournit l'occasion de préciser ses idées sur les causes de l'affaiblissement apparent des piles.

(1) Gehorcht die hydroelectrische Kette den von der Theorie ihr vorgeschriebenen Gesetzen, oder nicht ? Frage und Antwort. — *Jahrb. der. Ch und Phys.* (1830), t. LVIII p. 393-429.

(2) Versuche zu einer nähern Bestimmung der Natur unipolarer Leiter. — *Jahrb Ch. Phys.*, (1830), t. LIX, p. 384-435 ; et t. LX, p. 32-59.

53. — En 1831, paraissent plusieurs mémoires [1] d'Ohm. Le résultat le plus intéressant des nombreuses expériences faites sur un seul couple avec l'électroscope Bohnenberger est l'invariabilité de la tension de la pile, quelles que soient toutes ses dimensions, conformément aux expériences antérieures de Fechner. La seconde partie du mémoire est remplie par une longue discussion des diverses opinions émises sur le siège et l'origine de la force électromotrice dans les piles à liquides.

Dans le second de ces mémoires [2] Ohm, reprend l'étude générale du circuit, la discussion de l'expérience du condensateur à plateaux zinc-cuivre, la distribution des tensions lorsqu'on admet un saut brusque non seulement au contact zinc cuivre, mais aux deux contacts avec le liquide, à propos d'expériences de Pfaff, de Jæger, de Fechner, etc. Puis, décrivant les modifications qui se produisent dans la pile depuis sa fermeture, il conclut que la force électromotrice et la résistance intérieure peuvent se modifier par le passage du courant. Pour montrer que les variations de la force électromotrice suffisent à expliquer les variations observées, il institue des expériences de mesure pour ces deux quantités séparément : résistance intérieure et force électromotrice de la pile (t. LXIV, p. 29-33). C'est à leurs variations sous l'influence des variations du circuit extérieur qu'il rattache les ondes (wogen) de la pile, causes de tant de soucis pour les physiciens de cette époque.

54. — Enfin, il discute la question de la *résistance au passage* introduite par Fechner dans ses études sur les variations de la pile. Ohm regarde comme établie par ses études l'existence d'une force électromotrice négative (de polarisation) dans la pile, proportion-

(1) Versuche über den electrischen Zustand der geschlossenen einfachen galvanischen Kette und daran geknüpfte Beleuchtung einiger dunkeler Stellen in der Lehre vom Galvanismus. *Jahrb. der Ch. Ph. Schweigger*, t. LXIII, p. 1-26 ; 159-189.

(2) An Thatsachen fortgeführte Nachweisung des Zusammenhangs, in welchem die mannigfaltigen Eigenthümlichkeiten galvanischer, insbesondere hydroelectrischer Ketten unter einander stehen. — *Jahrb. Ch. Ph. Schweigger*, t. LXIII, p. 385-444 ; t. LXIV, p. 10-37 ; 138-158 ; 257-283.

nelle à la densité du courant dans la pile ; ce qui, à résistance interne invariable, donne pour le courant initial (avec nos notations modernes)

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

et après que la polarisation s'est établie

$$I = \frac{E - \alpha \frac{I}{S}}{R}$$

d'où

$$I = \frac{E}{R + \frac{\alpha}{S}}$$

ce qui est la même formule que celle de Fechner. Tout en constatant cet accord, Ohm défend son interprétation du phénomène. Puis il examine l'influence de l'inégale étendue des deux électrodes et montre comment elle permet de déterminer séparément ce que donnent chacune des deux électrodes dans le terme $\alpha : S$, qui devient $\alpha' : S' + \alpha'' : S''$. Enfin il conclut tout ce long travail, en exprimant sa satisfaction, je dirais presque son soulagement, d'avoir montré comment les actions qui se produisent dans la pile s'interprètent, elles aussi, conformément à sa théorie générale, et d'avoir ainsi levé les doutes qui l'avaient conduit à rejeter en appendice dans son livre de 1827 des vues un peu aventureuses sur les liquides dans lesquels se produisent des actions chimiques.

Cette discussion continue en 1833 (¹) ; Fechner n'accepte aucune des remarques d'Ohm : celui-ci revient sur le sujet, tant au point de vue de la discussion numérique des expériences, qu'au point de vue de l'interprétation des formules ; Fechner tient à introduire une résistance au passage, qui a longtemps encombré la science ; Ohm

(¹) *Zur Theorie der galvanischen Kette* ; von Fechner, t. LXVII, p. 127-134 ; — et même titre Ohm, t. LXVII, p. 341-354.

maintient que cette action à la surface doit être regardée comme une force électromotrice.

A signaler encore en 1832 ([1]) un mémoire d'électrostatique, à propos d'expériences de Pfaff dans lequel Ohm établit conformément aux idées de de Luc (Nouvelles idées sur la météorologie, Ch. v et vii) que les électricités cachées dans les corps, agissent aussi bien que les électricités libres, pour se repousser ou s'attirer mutuellement.

55. — D'après cette longue analyse des travaux d'Ohm en électricité, son œuvre nous apparait sous un aspect auquel nous ne sommes pas habitués en France. C'est par un labeur expérimental incessant qu'Ohm préparait ses méditations sur la propagation de l'électricité, tant dans les métaux que dans les liquides ; ce ne sont pas ses hypothèses qui lui ont fait découvrir les lois des résistances et des courants dérivés, ce sont ses expériences. C'est parce que les hypothèses de la théorie de la chaleur de Fourier, transportées en électricité, conduisaient directement aux lois expérimentales des courants électriques constants, qu'il les a si facilement adoptées, tandis qu'un examen un peu approfondi eût pu le faire hésiter à les prendre pour bases de sa théorie. Ainsi considérée au milieu de ses autres mémoires, sa *Théorie mathématique du circuit galvanique* est bien ce que devait produire dans un esprit capable d'abstraction la notion de résistance acquise expérimentalement.

Plus curieux des phénomènes naturels que des conséquences mathématiques et des applications éloignées, Ohm s'est contenté de montrer la fécondité de sa théorie dans le cas des courants constants ; il n'a pas hésité à consacrer encore de nombreuses années à la recherche expérimentale des phénomènes qui se produisent dans les piles hydroélectriques, dans l'espoir malheureusement déçu d'en résumer les lois aussi clairement et exactement qu'il avait réussi à le faire pour les métaux.

[1] Ueber eine verkannte Eigenschaft der gebundenen Electricität. *Jahrb Ch. Phys. Schweigger*, t. LV, p. 129-147.

Bien que surtout connu par l'œuvre dans laquelle il a donné la forme mathématique générale des lois des courants constants, c'est d'une curiosité de physicien qu'Ohm a toujours été animé. Aucune des difficultés mathématiques (existence et unité de la solution, par exemple) ne parait l'avoir inquiété. Ohm était un vrai « Naturforscher ».

CHAPITRE IV

KIRCHHOFF. — CLAUSIUS

56 — Kirchhoff ne s'est pas attaqué dès le début aux principes mêmes de la théorie d'Ohm; il a commencé par en faire des applications : distribution du courant électrique dans un plan ([1]), théorie et expériences ; répartition du courant entre des circuits linéaires quelconques ([2]); application des résultats précédents à des circuits dont certaines parties ne sont pas linéaires. ([3])

C'est dans ces Mémoires que se trouvent ce qu'on a appelé depuis, dans la théorie des courants dérivés, les deux lemmes de Kirchhoff ; dans le dernier, est établie l'équation de Laplace, pour l'intérieur du corps,

$$\Delta u = o$$

et les équations de surface

$$k \frac{\partial u}{\partial N} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial N_1} = o, \qquad u - u_1 = U,$$

pour la *tension* (Spannung) u d'Ohm. On y trouve aussi les résultats suivants : la solution est unique; la résistance d'un corps étendu en

([1]) Ueber den Durchgang eines electrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine Kreisförmige. — *P.A*, LXIV, 1845.
Nachtrag zu dem vorigen Aufsatze. — *P.A.*, LXVII, 1846.

([2]) Ueber die Auflösung der gleichungen, auf Welche man bei der Untersuchung der linearen vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. — *P. A.*, LXXII, 1847.

([3]) Ueber die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die rum Theil aus nicht linearen Leitern bestehen. — *P. A.*, LXXV, 1848.

volume, avec deux petites électrodes fixes, est déterminée ; la quantité de chaleur définie par la loi de Joule est minimum avec la répartition d'Ohm.

57. — C'est seulement après s'être familiarisé par ces premiers travaux avec la théorie d'Ohm, que Kirchhoff s'attaque aux principes, et met en lumière la relation précise entre l'électrostatique et les principes d'Ohm, relation entrevue d'une manière un peu confuse et intermittente par ce dernier. Analysons en détail ce mémoire [1], court mais fondamental. Les hypothèses d'Ohm ne sont pas toutes compatibles avec ce que nous apprend l'électrostatique ; en particulier celle-ci, que, dans l'équilibre, l'électricité est répartie avec une densité uniforme dans tout le volume du conducteur. Or il n'est pas douteux que l'équilibre doit apparaître comme un cas limite dans la théorie des courants ; Kirchhoff se propose de montrer comment les formules d'Ohm se déduisent des lois d'attraction et de répulsion électrostatiques, à l'aide d'hypothèses tout à fait naturelles.

Dans un conducteur en équilibre, la force électrique est nulle à l'intérieur ; le *potentiel* est uniforme, et l'électricité est répartie uniquement à la surface. Lorsqu'on met en contact deux conducteurs différents antérieurement neutres, l'un devient positif, l'autre négatif ; dans chacun d'eux le potentiel de toute l'électricité libre est uniforme ; mais il diffère de l'un à l'autre « car le calcul apprend que s'il avait la même valeur dans les deux conducteurs, l'électricité libre serait nulle en tout point, puisque l'électricité libre totale est nulle. Quant à la différence des deux valeurs du potentiel dans les deux conducteurs, elle pourrait dépendre de leur nature et de leur forme ; je fais l'hypothèse qu'elle est indépendante de cette dernière, et que cette différence de potentiel est la grandeur qui mesure la tension des deux corps ».

58. — Avant de suivre avec Kirchhoff les conséquences de cette hypothèse, examinons-la en elle-même. C'est encore d'électricité en

(1) Ueber die Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Electrostatik anschliesst. — *P. A.*, LXXVIII, 1849.

repos qu'il s'agit ; et les principes d'électrostatique sont insuffisants; les lois de Coulomb ne distinguent ni conducteur ni isolant ; à fortiori ne distinguent-elles pas un métal d'un autre ; un conducteur hétérogène n'est, à leur égard, qu'un conducteur unique. Depuis cinquante ans que Volta a découvert cette influence de l'hétérogénéité des conducteurs, la confusion règne encore, en 1849, dans l'esprit de nombre de physiciens qui croient que les lois de Coulomb suffisent à l'explication des phénomènes électrostatiques entre conducteurs dans le vide ; c'est qu'ils ne s'aperçoivent pas qu'en dehors des lois d'action entre charges électriques, formulées mathématiquement dans les lois de Coulomb, on est constamment obligé d'invoquer les lois d'action de la matière sur l'électricité, et réciproquement, mais que celles-ci n'ont pas de formule mathématique. Telles sont : la définition du conducteur homogène, dont la matière n'exerce aucune action sur l'électricité dans son intérieur ; la définition de l'isolant, qu'on traite comme impénétrable à l'électricité lorsqu'il entoure un conducteur, bien qu'on sache que l'isolant peut être chargé lui-même, ce qui n'est pas très cohérent. Dans l'énoncé mathématique, la matière a disparu : pour l'intérieur du conducteur, la force électrique est nulle ; pour sa surface, la force électrique est normale ; et cette dernière équation n'est plus une équation d'équilibre complète, puisqu'on ne s'explique en rien sur le jeu de forces, dues à l'isolant ou au conducteur qui contrebalance la force normale due à l'électricité. De même, à la surface de séparation des deux conducteurs, une différence de potentiel finie, c'est-à-dire une force électrique normale infinie dans une couche infiniment mince, est inadmissible, si l'on ne fait appel qu'aux seules forces de Coulomb, au même titre que dans l'intérieur d'un conducteur, puisque le passage de l'électricité à travers la surface se fait d'ailleurs sans obstacle. Invoquer la différence de nature des deux conducteurs, c'est précisément faire intervenir aussi la matière ; peut-être n'est-il pas inutile de l'énoncer formellement : A la surface de séparation de deux conducteurs, l'équilibre électrique dépend des actions d'origine électrique exercées suivant la loi de Coulomb et d'actions exercées par la matière sur l'électricité dans un domaine excessivement petit. Jamais Kirchhoff ne pousse

aussi loin son analyse, et à fortiori ne s'occupe de ces lois d'action mutuelle de l'électricité et de la matière, qui pourtant sont encore de la physique, et, par exemple, ont un rôle évident dans la production des étincelles. Suivi en cela par un grand nombre de mathématiciens modernes, Kirchhoff est satisfait lorsque l'hypothèse a pris une forme analytique, qui permet d'écrire les équations du problème. Ce sont H. von Helmholtz et Lord Kelvin qui ont recherché le contenu de ce fait d'une différence de potentiel au contact, et ont fait pressentir tout ce que l'étude expérimentale approfondie du phénomène peut fournir de données sur les propriétés moléculaires de la matière.

59. — Revenons au mémoire de Kirchhoff : Dans une chaine de plusieurs conducteurs, dont les deux extrêmes sont de même nature, il peut arriver que le potentiel du dernier soit égal à celui du premier, lorsque

$$\sum U_{12} = o\,;$$

dans ce cas on peut réunir les deux extrêmes, l'équilibre subsiste puisqu'ils sont à l'avance au même potentiel.

Mais si la condition d'équilibre n'est pas remplie, qu'arrivera-t-il au moment de la fermeture du circuit ? « En un clin d'œil, il s'établira dans le système une distribution déterminée d'électricité. Ne nous inquiétons pas de savoir si elle sera superficielle ou en volume. Soit u le potentiel de cette distribution sur un point du conducteur; u n'est pas une constante, c'est une fonction des coordonnées du point; en conséquence, les forces qu'exerce l'électricité libre sur l'électricité en un point intérieur au conducteur ne sont pas nulles. Soit R leur résultante; s'il n'y a pas d'électrité libre au point considéré, R décompose le fluide neutre, entraine l'électricité positive dans sa propre direction, et renvoie l'électricité négative à l'opposé ». Les masses positive et négative ainsi mises en mouvement sont égales, ainsi que leurs vitesses; il en passe une quantité k R par seconde et par centimètre carré, et le courant en transporte nécessairement des quantités égales en sens opposés.

Enfin « la différence des valeurs du potentiel de toute l'électricité libre, pour deux points infiniment voisins de part et d'autre d'une surface de contact est, par hypothèse, la même pendant le passage du courant que dans l'équilibre. »

Cela fournit immédiatemenl les lois d'Ohm : le potentiel

$$V = \sum \frac{m}{r}$$

joue le rôle attribué par Ohm à la tension u. Entrons à ce sujet dans quelques détails. La force R a pour composantes

$$-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z};$$

Appelons *densité du courant*, le rapport de l'intensité qui traverse normalement un petit élément de surface à la surface de l'élément. Soient j_1, j_2, j_3, les densités à travers trois éléments normaux aux axes de coordonnées.

L'hypothèse que le courant a la même direction que la force se traduit par les équations.

$$(1) \qquad \begin{cases} j_1 = -k \dfrac{\partial V}{\partial x} \\ j_2 = -k \dfrac{\partial V}{\partial y} \\ j_3 = -k \dfrac{\partial V}{\partial z}. \end{cases}$$

60. *Répartition de l'électricité.* — Considérons maintenant un parallélépipède et écrivons que ce qui entre par l'ensemble de trois faces sort par les trois autres ; considérons les deux faces normales à Ox situées à la distance dx (fig. 3). A travers la première, la densité du courant est j_1, à travers l'autre, elle est :

$$j_1 + \frac{\partial j_1}{\partial x} dx = -k\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} dx\right).$$

L'excès de ce qui entre sur ce qui sort est :

$$- \frac{\partial j_1}{\partial x} \, dx \, dy \, dz. = k. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \, dx \, dy \, dz.$$

Pour l'ensemble de toutes les faces, l'excès est donc :

$$k \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) dx \, dy \, dz$$

et dans le régime permanent on doit avoir :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = o.$$

Mais on sait que :

$$\Delta V = - 4\pi e$$

en appelant e la densité en volume de l'électricité libre.

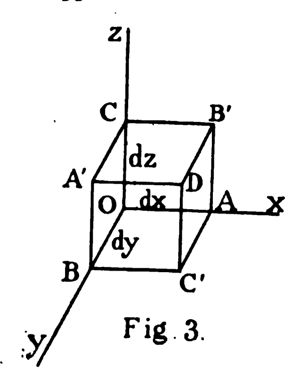


Fig. 3.

La densité de l'électricité libre est donc nulle dans tout l'intérieur des conducteurs parcourus par des courants permanents. C'est là un résultat tout à fait différent de celui d'Ohm, qui pensait que la répartition de l'électricité en volume était directement donnée par la valeur de u, (notre V actuel).

Les conditions à la surface sont, comme celles d'Ohm, pour la surface libre, en contact avec l'isolant :

$$\frac{\partial V}{\partial n} = o.$$

et pour la surface de contact de deux conducteurs

$$k \frac{\partial V}{\partial n} + k_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} = o$$

les normales n, n_1 étant prises vers l'intérieur de chaque corps.

61. — Cette théorie a un caractère tout à fait général, elle s'applique avec succès aux expériences, telles que celles de Kohlrausch (1849), dans lesquelles un point d'un circuit fermé est relié à un plateau d'un condensateur.

N'ayant fait intervenir que les lois de l'électrostatique, et non celles de Weber, on n'a pas encore une vue d'ensemble de toutes les lois des courants fermés ; mais pour établir l'accord des considérations actuelles avec la loi de Weber, il suffit d'y ajouter l'hypothèse que « la force nécessaire pour séparer les deux électricités de l'élément de volume v, peut se calculer en traitant ces deux électricités comme en repos » comme l'explique Kirchhoff en finissant.

Sans doute le résultat relatif à la densité nulle de l'électricité, dans le conducteur qui charrie un courant, est d'apparence paradoxale ; mais l'existence des électricités positive et négative n'est-elle pas elle-même un paradoxe ?

62. — Revenons maintenant à la fin du mémoire précédent de Kirchhoff. Joule avait établi, par ses expériences de 1841, que la chaleur dégagée en une seconde par le passage du courant i dans un fil de résistance r, est proportionnelle à ri^2. Appliquons cette loi à chaque élément de volume du conducteur. Ayant tracé les tubes de courant et les surfaces de niveau, prenons pour élément de volume $ds\,dS$, une petite tranche ds, de base dS, d'un ces tubes ; l'intensité du courant est $k\,\frac{\partial V}{\partial s}\,dS$, ce qui donne

$$\frac{ds}{kdS}\,i^2 = \frac{ds}{kdS}\left(-kdS\,\frac{\partial V}{\partial s}\right)^2 = kds\,dS\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)^2$$

et remarquant que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

on voit que la quantité de chaleur dégagée dans tout le conducteur est

$$Q = \sum k \int\int\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz.$$

63. — Cette quantité est minimum lorsque le potentiel obéit aux lois d'Ohm pour l'état permanent

$$\Delta V = o \qquad \text{intérieur}$$

$$\left. \begin{array}{r} k \dfrac{\partial V}{\partial n} + k_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial n_1} = o \\ V - V_1 = U \end{array} \right\} \quad \text{surfaces de contact}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = o \qquad \text{surface libre.}$$

Formons en effet, la variation de Q en supposant que V soit augmenté partout d'une quantité φ variable d'un point à l'autre, il vient rigoureusement

$$\delta Q = \sum k \int\int\int \left[2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \dots + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \dots \right] dx\, dy\, dz.$$

Intégrant par parties les termes du premier groupe, suivant la transformation de Green :

$$\delta Q = \left\{ \begin{array}{l} -2 \sum k \displaystyle\int\int \varphi \frac{\partial V}{\partial n} dS - 2 \sum k \int\int\int \varphi \Delta V\, dx\, dy\, dz \\ + \displaystyle\sum k \int\int\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz \end{array} \right.$$

et toute la première ligne est nulle, quel que soit φ en vertu des équations de l'état permanent d'Ohm.

Tous les termes de la seconde ligne sont évidemment positifs ; une variation quelconque φ, par rapport à la distribution permanente, augmente donc la quantité de chaleur dégagée suivant la loi de Joule.

64. — On peut donner facilement une autre expression de Q : En effet, on a, par la transformation de Green

$$Q = \sum k \int\int\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

$$= - \sum \int\int \left(Vk \frac{\partial V}{\partial n} + V_1 k_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1}\right) dS$$

puisque $\Delta V = o$.

Aux surfaces libres $\frac{\partial V}{\partial n} = o$; aux surfaces de contact, les équations

$$V - V_1 = U$$

$$k \frac{\partial V}{\partial n} + k_1 \frac{\partial V_1}{\partial n_1} = o,$$

permettent de réduire les intégrales de surface à

$$Q = - \sum U \int k \frac{\partial V}{\partial n} dS$$

ou en appelant i l'intensité qui traverse la surface dans le sens positif choisi pour V

$$Q = \sum Ui.$$

Telle est l'expression de la quantité totale de chaleur que Kirchhoff donne, en dernier lieu, comme équivalente à celle de Joule, en vertu des lois d'Ohm (1848). Nous allons voir quel parti Clausius va en tirer quatre ans plus tard.

65. — Clausius avait appliqué, quelques mois auparavant, les principes de l'électrostatique, à la recherche de l'équivalent mécanique d'une décharge électrique et de l'échauffement qu'elle produit dans un corps conducteur ; il en fait une nouvelle application aux courants constants ([1]).

Rappelant l'expression électrostatique du travail

$$\mathcal{E} = (V_1 - V_2)q$$

des forces électriques sur une charge électrique q qui passe du potentiel V_1 au potentiel V_2, il en déduit que pour un courant de densité j, le travail relatif à l'unité de temps, dans l'élément de volume $dndS$ du tube de courant normal à l'élément de surface dS, est

$$d\mathcal{E} = -jdS.\frac{\partial V}{\partial n}dn.$$

Dans un tube de courant, on a donc

$$\mathcal{E} = i(V_1 - V_2)$$

entre deux points où les potentiels sont V_1 et V_2.

En remplaçant $V_1 - V_2$ d'après la loi d'Ohm, il vient

$$\mathcal{E} = Ri^2.$$

Que devient ce travail ? Dans un fil cylindrique l'électricité marche avec la même vitesse tout le long du fil, il n'y a pas d'accélération ; donc sur toute la longueur le travail des forces électriques est employé tout entier à vaincre la résistance qu'oppose le fil. Clausius admet que ce travail se manifeste uniquement sous forme de chaleur. La loi d'Ohm et les principes de l'électrostatique conduisent donc pour les courants permanents, à la loi de Joule.

66. — Il importe de faire quelques réserves au sujet de cette manière d'arriver à la loi de Joule. L'expression Ri^2 n'apparaît ici que comme

([1]) Ueber die bei einem stationären electrischen Strome in dem Leiter gethane Arbeit und erzeugte Wärme. — *Pogg. Ann.* LXXXVII — (1852) p. 415.

équivalente à l'expression $i(V_1 - V_2)$, et rien n'indique laquelle de ces deux formes est l'expression immédiate de la loi physique, ou même si ce n'en serait pas une troisième, $\frac{1}{R}(V_1 - V_2)^2$, par exemple, qui donnerait en toute circonstance la vraie valeur de la quantité de chaleur dégagée. Pour bien comprendre la portée de cette restriction, qu'on admette un instant cette dernière forme, comme applicable aux courants variables, et, raisonnant comme Helmholtz ou Thomson, qu'on recherche les lois des courants induits auxquels elle correspondrait ! La loi de Joule, que la chaleur dégagée est Ri^2 en toute circonstance dans un fil homogène, est une loi expérimentale, et il ne faut pas oublier, pour l'établir, de citer non seulement les expériences de Joule avec courants permanents, mais les expériences exécutées par lui avec les courants d'induction.

LIVRE II

COURANTS PERMANENTS OU VARIABLES SANS INDUCTION

Désormais, toutes les équations sont écrites en unités électromagnétiques.

Loi de Coulomb

$$f = \frac{\Omega^2}{K} \frac{ee'}{r^2}.$$

Équation de Poisson

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial V}{\partial z}\right) = -4\pi\Omega^2 e.$$

Ω *désigne la vitesse de la lumière dans le vide.*

CHAPITRE PREMIER

COURANTS DANS L'ESPACE

67. — Résumons les résultats acquis, en leur donnant un peu plus de généralité.

Dans un conducteur isotrope homogène, la densité de courant est liée à la force électrique due à l'électricité libre, dont le potentiel est V, par les équations

$$j_1 = -k\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$j_2 = -k\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$j_3 = -k\frac{\partial V}{\partial z},$$

Dans un conducteur isotrope mais hétérogène, la force qui agit sur l'électricité contient deux termes, l'un qui provient de la distribution électrique, l'autre qui provient de la distribution de la matière ; nous appellerons cette dernière force **E**, *force électrique d'hétérogénéité*.

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} j_1 = k\left(-\dfrac{\partial V}{\partial x} - \mathbf{E}_1\right), \\ j_2 = k\left(-\dfrac{\partial V}{\partial y} - \mathbf{E}_2\right), \\ j_3 = k\left(-\dfrac{\partial V}{\partial z} - \mathbf{E}_3\right). \end{cases}$$

Pour une substance isotrope, et pour une hétérogénéité simple,

cette force est évidemment normale aux surfaces d'égale composition c, et fonction continue de la variation de composition ; on peut donc l'écrire sous la forme :

$$E_1 = \mathcal{E}(c)\frac{\partial c}{\partial x},$$

ce qui donne aux équations la forme :

$$j_1 = -k\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \mathcal{E}(c)\frac{\partial c}{\partial x}\right).$$

Mais, lorsque l'hétérogénéité est multiple, due par exemple à la présence simultanée de plusieurs substances qui se diffusent et réagissent l'une sur l'autre dans un liquide, il peut n'y avoir pas de surface d'égale composition, et la force électrique d'hétérogénéité peut même n'être pas une somme de termes provenant de chacune des hétérogénéités considérées isolément ; tout semble indiquer jusqu'à présent qu'elle n'est pas fonction directe du courant et qu'elle n'en dépend que par les hétérogénéités que crée son passage.

68. Courants variables. — Par suite de la définition même de la densité de courant, nous avons par la considération déjà employée d'un petit parallélépipède rectangle

$$\frac{\partial j_1}{\partial x} + \frac{\partial j_2}{\partial y} + \frac{\partial j_3}{\partial z} = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

en appelant e la densité de l'électricité en volume au point considéré. Nous emploierons dans la suite une notation et un langage abrégés qui commencent à se répandre, et nous écrirons :

$$\text{Div.}\, j = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

que nous énoncerons « Divergence de j égale... » ; c'est l'équation de Conservation de l'électricité.

Dans un conducteur homogène nous aurons :

$$\text{Div.}\, j = -k\Delta V$$

ou :

$$-\frac{\partial e}{\partial t} = +\frac{4\pi k\Omega^2}{K}\cdot e$$

en appliquant la relation électrostatique, que je suppose connue.

$$K.\ \Delta V = -4\pi\Omega^2 e$$

dans un milieu de pouvoir inducteur spécifique K [1].

Intégrons par rapport au temps, il vient :

$$e = e_0 \mathrm{e}^{-4\pi\frac{k\Omega^2}{K}t}.$$

Dans un milieu conducteur homogène, les densités internes disparaissent sur place, exponentiellement. Cette disparition est d'ailleurs extraordinairement rapide dans les métaux.

Le temps τ de chute dans le rapport de 1 à $\mathrm{e} = 2{,}78\ldots$ est donné par le tableau suivant :

Conducteur	$\frac{K}{4\pi k\Omega^2} = \tau$	
Cuivre	$1{,}4\ 10^{-19}$	seconde
Bismuth	$1{,}12\ 10^{-17}$	»
Solution tarturée de sulfate de cuivre	$1{,}00\ 10^{-10}$	»
Solution étendue de chlorure de potassium [2] (80 10^{-6} gr. par centim. cube)	10^{-7}	»
Verre ordinaire peu isolant	10	

69. — Mais il n'en est pas de même des densités superficielles. Dans un conducteur hétérogène, isotrope, il vient :

$$\text{Div.}\, j = \text{Div.}\left(-k\frac{\partial V}{\partial x}\right) - \text{Div.}\,(k\mathbf{E}),$$

(1) Sans discuter ici toutes les questions que soulève la représentation, à coup sûr insuffisante, des propriétés spécifiques de chaque corps au point de vue électrostatique, au moyen d'un seul coefficient K.

(2) En prenant 80 pour le pouvoir inducteur spécifique.

avec :

$$\text{Div.}\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right) = -4\pi\Omega^2 e$$

et si k ne varie pas proportionnellement à K, il n'est plus possible d'éliminer V, mais on peut toujours éliminer e et l'on obtient :

(II) $$\text{Div.}\left[k\mathbf{E} + k\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\Omega^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)\right] = o.$$

Telle est l'équation fondamentale du problème que nous étudions actuellement.

Lorsque l'hétérogénéité est simple, k et K sont des fonctions de la concentration.

70. **Surface de séparation.** — A la surface de séparation de deux conducteurs A, B en bon contact, nous aurons, en partant des équations précédentes de variation continue,

$$j_{\text{B}} - j_{\text{A}} = -\frac{\partial}{\partial t}(e_s)$$

e_s désignant la densité superficielle de l'électricité, j_{A}, j_{B} les densités du courant, normales à la surface, comptées positivement en traversant la surface du corps A vers le corps B.

$$\int_{\text{A}} \frac{\partial V}{\partial n}\,dn + \int_{\text{A}}^{\text{B}} \mathbf{E}_n dn = o$$

ou :

(III) $$V_{\text{B}} - V_{\text{A}} = -\int_{\text{A}}^{\text{B}} \mathbf{E}_n dn$$

et cette quantité est caractéristique des deux corps en contact, comme la force E elle-même est caractéristique de l'hétérogénéité et indépendante du courant.

On a, en outre, entre les composantes normales,

$$\text{(IV)} \qquad K_B \frac{\partial V_B}{\partial n} - K_A \frac{\partial V_A}{\partial n} = -4\pi\Omega^2 e_s,$$

à associer à

$$\text{(V)} \qquad -k_B \frac{\partial V_B}{\partial n} + k_A \frac{\partial V_A}{\partial n} = -\frac{\partial e_s}{\partial t},$$

en considérant la différence des densités de courant de part et d'autre de la couche hétérogène.

71. Couche de passage. — La densité du courant varie d'une manière rapide dans la couche du passage, mais ne devient évidemment pas infinie, dans l'épaisseur de la couche de passage ; les équations (I) se réduisent donc à la suivante

$$\frac{\partial V}{\partial n} + E = o,$$

qui, avec

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(K \frac{\partial V}{\partial n}\right) = -4\pi\Omega^2 e,$$

donne la répartition de l'électricité en volume dans la couche de passage :

$$\Omega^2 e = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n}(KE).$$

Dans l'état d'équilibre, où $\frac{\partial V_A}{\partial n}$ et $\frac{\partial V_B}{\partial n}$ sont séparément nuls de part et d'autre de la couche de passage, la densité superficielle e_s, qui est la charge totale de la couche de passage, est nulle (Eq. IV). Comme la densité n'est pas nulle en chaque point, la couche de passage est occupée au moins par deux couches électriques, l'une positive, l'autre négative, de masse totale nulle ; de là le nom de *couche double*, que nous continuerons à lui attribuer, sans pour cela suppo-

ser que l'électricité positive soit localisée d'un côté et la négative de l'autre côté d'une surface unique. Cette propriété des couches de passage a été nettement formulée par Helmholtz ([1]); elle était déjà familière à bon nombre de physiciens; mais beaucoup de ceux-ci l'opposaient à la notion de tension au contact, au lieu de reconnaître que ces deux notions concordent. Toutefois, la concordance n'est pas aussi simple que l'imaginait Helmholtz et que l'imaginent encore la plupart des physiciens. Cherchons en effet le « moment électrique de la couche double » par unité de surface, sa puissance, comme on dit souvent :

$$\Omega^2 \int_A^B e\, n dn = -\frac{1}{4\pi} \int_A^B n \frac{\partial}{\partial n}\left(K \frac{\partial V}{\partial n}\right) dn$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[nK \frac{\partial V}{\partial n}\right]_A^B + \frac{1}{4\pi} \int_A^B K \frac{\partial V}{\partial n}\, dn.$$

Dans le second membre, le premier terme est négligeable pour une couche de passage infiniment mince. Quant au second terme, il n'a d'expression simple que dans un seul cas, celui où le pouvoir inducteur spécifique est constant dans toute la couche de passage; il donne alors :

$$\Omega^2 \int_A^B e\, n dn = \frac{K}{4\pi}(V_B - V_A).$$

Lorsque le pouvoir inducteur spécifique K *est constant dans toute la couche de passage, la puissance de la couche double est égale à* $\frac{K}{4\pi\Omega^2}$ *fois la différence de potentiel au contact.*

C'est l'énoncé admis comme général.

([1]) Über einige Gesetze der Vertheilung electrischer Ströme in körperlichen Leitern mit Anwendung auf die thierisch-electrischen Versuche. — *Pogg. Ann.*, LXXXIX, 1853, p. 226 (*Abh.* XVII, p. 489).

72. — Mais lorsque le pouvoir inducteur spécifique est différent dans les deux conducteurs, il n'est pas permis d'admettre qu'il soit constant dans la couche de passage. La quantité :

$$\int_A^B K \frac{\partial V}{\partial n} dn = -\int_A^B KEdn,$$

est alors une constante spécifique de la surface de contact, tout autre que la différence de potentiel au contact.

C'est $4\pi\Omega^2$ fois la puissance de la couche double.

Ces deux quantités sont distinctes, comme sont distinctes dans un corps hétérogène la densité électrique « vraie » et la densité électrique « libre », suivant les dénominations de Hertz.

En particulier, lorsque les corps en contact sont une dissolution et un métal, c'est-à-dire deux corps dont les pouvoirs inducteurs spécifiques sont de l'ordre de 80, *et de* 1, *il n'y a aucun rapport entre la puissance de la couche double et la différence de potentiel au contact.*

73. — Lorsque, par l'emploi d'une différence de potentiel auxiliaire, on aura annulé la puissance de la couche double, rien ne prouve que la densité électrique aura été rendue nulle en tout point de l'épaisseur de la couche de passage ; par conséquent, la différence de potentiel ne sera pas nécessairement annulée.

La méthode d'extension de la surface de contact, correcte pour reconnaître que la puissance de la couche double est compensée, n'apprend rien sur la valeur de la différence du potentiel au contact.

Nous ne nous occuperons pas davantage des propriétés de la couche de passage ; cette étude exigerait à elle seule un grand nombre de leçons.

74. — La différence $V_B - V_A$ des valeurs du potentiel de part et d'autre de la surface de séparation de deux conducteurs homogènes est constante ; par suite, les lignes de niveau sur cette surface sont

communes, leurs trajectoires orthogonales aussi ; les composantes tangentielles de la force électrique sont égales, aussi bien pendant l'état variable que pendant l'état permanent.

Le plan, normal à la surface, qui contient la ligne de courant d'un côté, contient aussi la ligne de courant de l'autre côté.

Dans l'état permanent, en appelant j_A, j_B, les densités de courant, θ_A, θ_B, les angles qu'elles font avec la normale, dans le plan commun, on a alors,

$$\frac{j_A \sin \theta_A}{k_A} = \frac{j_B \sin \theta_B}{k_B},$$

$$j_A \cos \theta_A = j_B \cos \theta_B$$

D'où la loi de réfraction :

$$\text{(VI)} \qquad \frac{1}{k_A} \operatorname{tg} \theta_A = \frac{1}{k_B} \operatorname{tg} \theta_B.$$

En conséquence, la densité de l'électricité n'est pas nulle à la surface de séparation ; elle est égale à

$$\text{(VII)} \qquad e_s = + \frac{1}{4\pi\Omega^2}\left(\frac{K_B}{k_B} - \frac{K_A}{k_A}\right) j \cos \theta,$$

dans l'état permanent.

Fig. 4

75. — Dans l'état variable, la loi de réfraction ne s'applique plus, car on a pour seconde équation :

$$j_A \cos \theta_A - j_B \cos \theta_B = \frac{\partial e_s}{\partial t}$$

et, en éliminant e et V avec l'équation (IV) en K,

$$\text{(VIII)} \qquad \left\{ \begin{aligned} & -4\pi (j_A \cos \theta_A - j_B \cos \theta_B) = \frac{K_A}{\Omega^2 k_A} \frac{\partial}{\partial t} (j_A \cos \theta_A) \\ & \qquad\qquad - \frac{K_B}{\Omega^2 k_B} \frac{\partial}{\partial t} (j_B \cos \theta_B) \\ & \frac{j_A \sin \theta_A}{k_A} = \frac{j_B \sin \theta_B}{k_B}. \end{aligned} \right.$$

La loi de variation de la densité superficielle en fonction du temps, n'est pas, comme celle de la densité interne, indépendante de la forme des conducteurs et de la distribution des courants.

76. Pertes superficielles. — Nous ne connaissons pas encore la loi mathématique des pertes par la surface lorsque l'isolant est médiocre ; nous n'en parlerons pas dans ce cours.

77. — Les équations électrostatiques qui déterminent la densité en volume et la densité superficielle ont été longtemps écrites en prenant un pouvoir inducteur K égal à 1 partout. J'ai déjà signalé comment ce pouvoir inducteur nous fait modifier le résultat d'Helmholtz, relatif à la puissance d'une couche double. Chose curieuse, dans ce mémoire de 1853, Helmholtz ne signale pas l'existence nécessaire de la couche superficielle simple à la surface de contact de deux conducteurs. C'est, je crois, dans le mémoire de Kirchhoff de 1857 [1] qu'elle apparait pour la première fois. Dans le premier de ses grands mémoires sur l'électrodynamique, Helmholtz l'écrit encore de même (1870). Maxwell, après avoir montré si nettement dans le Livre I de son grand traité (1873), l'importance capitale du pouvoir inducteur, l'oublie au Livre II, en électrocinétique, et écrit comme Kirchhoff l'équation de la densité superficielle due au passage du courant [2], avec $K = 1$; il y attache d'ailleurs si peu d'importance, que dans le problème particulier des sphères concentriques, qu'il traite ensuite, il ne s'en occupe plus. Cet oubli parait d'autant plus étrange, que dans la suite de son livre, la notion de « courant de déplacement », qui est sous la dépendance directe du pouvoir inducteur spécifique, joue un rôle considérable dans les équations aux dérivées partielles, sans que les équations à la surface soient toujours écrites complètement.

[1] Über die Bewegung der Electricität in Leitern. — *Pogg. Ann.* CII.
[2] Livre II, chap. IX, éq. 7 à 12, t. I, p. 491 de la traduction française.

78. — C'est seulement en 1888, que de deux côtés différents, l'équation (IV) à la surface est enfin écrite.

MM. Cohn et Arons furent conduits à la prendre pour base d'une méthode de mesure du pouvoir inducteur spécifique des liquides conducteurs, comme les dissolutions salines étendues, en remarquant que dans un électromètre plein de solution, parcouru par un courant, ces densités à la surface des électrodes doivent exercer sur celles de l'aiguille un couple proportionnel au pouvoir inducteur, comme si le liquide était isolant.

La même année, partant des équations du traité de Maxwell, M. Gouy, de son côté, mettait aussi ces charges en évidence par les forces qu'elles exercent dans un électromètre à quadrants plein d'eau, traversé par un courant ; d'abord étonné de trouver ces forces quatre-vingts fois plus grandes que dans l'air, il interpréta ce résultat en attribuant à l'eau un pouvoir inducteur K de l'ordre de 80, et s'en servit aussitôt pour mesurer la constante diélectrique des dissolutions, même très conductrices, regardée comme proportionnelle à la force mécanique.

79. — Examinons la question sous son aspect le plus simple, pour un courant variable, dans un conducteur cylindrique, en négligeant l'induction magnétique.

Les équations du courant, uniforme à travers la surface de séparation, sont en comptant positivement de A vers B :

$$j_A - j_B = \frac{\partial e}{\partial t}$$

et :

$$\frac{K_A}{k_A} j_A - \frac{K_B}{k_B} j_B = -4\pi\Omega^2 e$$

ou, en introduisant les temps τ dont nous avons donné plus haut le tableau pour divers conducteurs :

$$\tau_A j_A - \tau_B j_B = e.$$

D'où :

$$i_1 = \frac{e - \tau_2 \frac{de}{dt}}{\tau_1 - \tau_2}$$

$$i_2 = \frac{e - \tau_1 \frac{de}{dt}}{\tau_2 - \tau_1} \cdot$$

Toutes les fois que la variation relative de charge est lente, — qu'elle n'atteint pas un millième pendant le temps τ_1 ou τ_2 par exemple, — le second terme est négligeable ; c'est ce qui arrive toujours pour les métaux, toujours pour les dissolutions concentrées, avec les oscillations de Tesla (fréquence [illegible]). Mais pour ces mêmes dissolutions avec les ondes hertziennes de quelques mètres, et pour les solutions étendues avec des oscillations de Tesla, même lentes, le second terme devient comparable au premier. Il en est de même avec les décharges non oscillantes, si elles sont très rapidement amorties.

Supposons que l'un des conducteurs, A, soit une électrode [illegible] et l'autre, B, une solution étendue, on pourra se contenter de prendre :

$$i_1 = \frac{e}{\tau_1} - \frac{de}{dt}$$

$$i_2 = \frac{e}{\tau_2} \cdot$$

Dans ce cas la densité superficielle est proportionnelle à l'intensité dans l'électrolyte, quelle que soit la loi de variation.

Si enfin la variation est lente, si la fréquence est de moins de [illegible] pour les solutions très étendues, on peut prendre :

$$i_1 = i_2 = \frac{e}{\tau_2} \cdot$$

[illegible] sont les forces pondéromotrices qui agissent sur les électrodes.

La force électrique moyenne dans la couche superficielle est :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{j_A}{k_A} + \frac{j_B}{k_B}\right)$$

soit :

$\frac{j_B}{2k_B}$ pratiquement ; la pression électrostatique est

$$p = e\frac{j_B}{2k_B} = 2\pi\Omega^2\frac{e^2}{K_B}.$$

comme à la surface de séparation d'un conducteur et d'un isolant, pour la même charge, ce qui justifie pleinement la méthode de M. Gouy pour la mesure du pouvoir inducteur K des électrolytes.

80. Problèmes divers. — Le problème complet est le suivant :

Etant donné un système de corps conducteurs dont on connait les propriétés physiques (k, K, E) en chaque point, trouver la distribution des potentiels, des courants et des charges.

Nous ne nous en occuperons pas cette année. On sait que pour des conducteurs homogènes, avec différences de potentiel localisées aux surfaces de contact, la solution mathématique est unique.

Nous ne nous occuperons que de problèmes restreints : calculer la résistance d'un conducteur homogène, connaissant la distribution du courant sur la surface, distribution ordinairement localisée sur deux aires de petite étendue, appelées électrodes, le reste étant bien isolé ; ou, calculer la résistance connaissant la distribution des potentiels sur les électrodes.

81. Analogies diverses. — Les équations

$$\Delta V = o,$$

$$V_A - V_B = U, \qquad k_A\frac{\partial V_A}{\partial n} = k_B\frac{\partial V_B}{\partial n} \quad \text{(Surface)}$$

qui déterminent la distribution des courants permanents, sont tout à fait analogues à celles de l'électrostatique, pour un ensemble de diélectriques en contact.

Elles conviennent également pour des corps conducteurs de la chaleur, en désignant par V la température.

On peut donc se poser des problèmes mathématiques identiques dans ces diverses théories ; mais les problèmes qui se présentent le plus naturellement, et qui ont le plus d'intérêt, ne sont pas tout à fait pareils, à cause de la différence des conditions superficielles.

D'abord la condition $V_A - V_B \neq o$ est propre au galvanisme. En outre, les surfaces libres, en galvanisme, sont parfaitement isolées ; la condition y est $\frac{\partial V}{\partial n} = o$. En électrostatique, les diélectriques, s'ils ne s'étendent pas indéfiniment sont limités par des conducteurs ; la condition superficielle $V = C^{te}$, aux électrodes est toute différente. En chaleur, les corps sont en contact avec des sources, $V = C^{te}$, ou rayonnent et perdent par la surface ; ces pertes ne sont jamais négligeables, et on admet qu'elles sont proportionnelles à V.

Tout utiles que soient les solutions obtenues en électrostatique et en chaleur, elles exigent une certaine adaptation pour être utilisées en galvanisme.

82. Analogie hydrodynamique.— Une autre analogie, quoique encore incomplète, est intéressante : en appelant V la pression d'un liquide incompressible, les équations permanentes du galvanisme sont celles du mouvement de ce liquide à travers un corps poreux, *lorsque les accélérations sont partout négligeables*. C'est cette restriction qui nous force à réfléchir ; divers auteurs, et non des moindres, ont examiné l'influence qu'exercerait une inertie de l'électricité sur les lois des courants ; mais tous ont examiné les états variables, ce qui rend les expériences fort délicates ; or, une inertie se montrerait tout aussi bien dans l'état permanent, pourvu que les densités des courants varient beaucoup d'un point à l'autre : les équations eulériennes complètes du mouvement permanent du

liquide sont en effet dans un filtre homogène :

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+\rho X=\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)+ku,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=o;$$

l'inertie de l'électricité se traduirait de même par des termes en :

$$j_1\frac{\partial j_1}{\partial x}+j_2\frac{\partial j_1}{\partial y}+j_3\frac{\partial j_1}{\partial z}$$

surtout sensibles au voisinage des électrodes ponctuelles, des points anguleux, des changements brusques de section. Il y aurait donc à cet égard un grand intérêt à étudier avec précision ce que donnent les lois d'Ohm dans ces différents cas, pour pouvoir les comparer ultérieurement avec l'expérience et avec ce que donneront les termes que je signale ici, quand leur étude sera faite.

CHAPITRE II

ÉLECTRODES DE GRANDE CONDUCTIBILITE

83. — Soient deux électrodes A et B de conductibilité très grande par rapport à celle du milieu dans lequel elles sont plongées. A la surface de séparation de l'une d'elles les lignes de courant sont de part et d'autre dans un même plan normal à la surface et font avec la normale des angles θ_0 et θ tels que l'on ait

$$\frac{\operatorname{tg} \theta_0}{k_0} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{k}.$$

Si le rapport $\frac{k}{k_0}$ est très petit tg θ sera aussi très petit (à moins que tg θ_0 ne soit infini), c'est-à-dire que les lignes de courant dans le milieu de faible conductibilité k sont sensiblement normales à la surface de l'électrode de grande conductibilité. Celle-ci joue le rôle de surface équipotentielle.

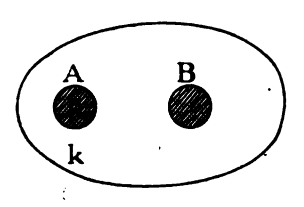


Fig. 5.

84. — Ceci étant, on a à satisfaire aux équations suivantes

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta V = o & \text{en tout point du milieu} \\ V = V_1 \\ V = V_2 & \text{aux deux électrodes} \\ \dfrac{\partial V}{\partial n} = o & \text{à la surface de l'isolant qui entoure le conducteur.} \end{cases}$$

Le flux qui sort d'une surface quelconque entourant une électrode (A) est

(2) $$I_1 = k \int \frac{\partial V}{\partial n} dS_1$$

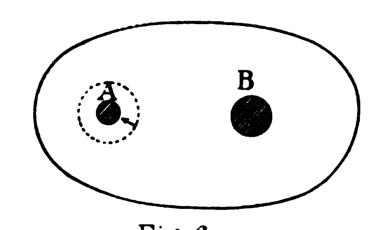


Fig 6

la normale étant prise vers l'électrode, puisque la force est

$$-\frac{\partial V}{\partial n}.$$

85. — L'intensité a donc la même expression analytique que la charge totale dans le problème électrostatique soumis aux mêmes conditions limites, et où k représenterait le pouvoir inducteur spécifique. En particulier pour un milieu homogène indéfiniment étendu, nous n'avons qu'à transcrire les équations de capacité, pour obtenir des équations de conductibilité

$$I_1 = C_{11}V_1 + C_{12}(V_1 - V_2) + C_{13}(V_1 - V_3) + \dots$$
$$I_2 = C_{21}(V_2 - V_1) + C_{22}V_2 + C_{23}(V_2 - V_3) + \dots$$

. . . .

où, comme on sait,

$$C_{12} = C_{21}$$

représente la capacité mutuelle des deux conducteurs 1, 2, et pourra aussi bien s'appeler la conductibilité mutuelle des deux électrodes. Résolues par rapport à V, les équations deviendraient

$$V_1 = R_{11}I_1 + R_{12}I_2 + \dots.$$
$$V_2 = R_{12}I_1 + R_{22}I_2 + \dots.$$

. . . .

et on pourra donner aux coefficients R le nom de résistances, qui correspond exactement à leur rôle dans le cas de deux électrodes seulement.

Il reste à remarquer que, si ΣI n'est pas nulle, il faut imaginer une dernière électrode à l'infini enveloppant le tout.

86. — Quand on n'a que deux électrodes la notion de résistance est simple : le courant qui sort de l'électrode A est égal à celui qui entre dans l'électrode B. La résistance est donnée par la relation :

$$\text{(3)} \qquad RI = V_A - V_B$$

d'où

$$R = \frac{V_A - V_B}{k \int \frac{\partial V}{\partial n} dS}.$$

Prenons une fonction Φ telle que

$$\Phi = 0 \text{ dans tout le milieu}$$
$$\Phi = 1 \text{ sur A}$$
$$\Phi = 0 \text{ sur B}$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \text{ sur la surface limite.}$$

On aura alors

$$V = V_B + (V_A - V_B)\,\Phi$$

solution qui satisfait à toutes les conditions.

L'intensité I est

$$I = k\,(V_A - V_B) \int \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, dS$$

ce qui donne

$$RI = Rk\,(V_A - V_B) \int \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, dS = V_A - V_B,$$

et enfin

$$(4) \qquad R = \frac{1}{k\int \frac{\partial \Phi}{\partial n}\, dS}$$

l'intégrale étant étendue à une surface qui entoure l'un des pôles.

87. Cas particuliers. — Deux conducteurs cylindriques et concentriques de hauteur h et de rayons a et b plongés dans un liquide. Prenons l'axe du système pour axe des z l'équation $\Delta V = o$ devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = o.$$

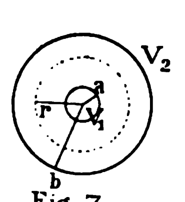


Fig. 7.

Cette équation a une intégrale de la forme

$$V = A + B \log r$$

r étant la distance à l'axe ; on a donc

$$V_1 = A + B \log a$$

$$V_2 = A + B \log b$$

d'où

$$V_1 - V_2 = B \log \frac{a}{b}.$$

Pour un cylindre de rayon r compris entre a et b, la normale est le rayon : on a

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{B}{r}$$

et par suite

$$\int \frac{\partial V}{\partial n}\, dS = \frac{B}{r} \times 2\pi r h = 2\pi B h.$$

La résistance est donc

$$(5) \qquad R = \frac{B \log \frac{a}{b}}{kB\, 2\pi h} = \frac{\log \frac{a}{b}}{2\pi k h}.$$

88. — **Deux sphères concentriques de rayons différents a et b.** Soit r la distance au centre : l'intégrale

$$V = A + \frac{B}{r}$$

donne

$$V_1 - V_2 = \frac{B}{a} - \frac{B}{b}.$$

Sur une sphère quelconque de rayon intermédiaire, on a

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{B}{r^2}$$

$$\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = 4\pi B.$$

La résistance est

$$(6) \qquad R = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \frac{1}{4\pi k}.$$

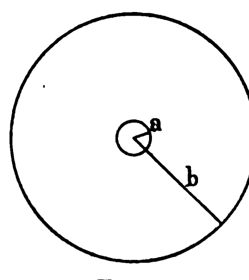


Fig. 8.

Si la sphère extérieure est très grande, le terme $\frac{1}{b}$ peut devenir négligeable et la résistance se réduit à

$$R = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{4\pi k}$$

et ce résultat sera évidemment applicable à une enveloppe extérieure de très grandes dimensions, partout très éloignée de la petite sphère, quelle que soit sa forme.

89. — **Deux petites électrodes sphériques à grande distance l'une de l'autre.**

Solutions approchées. — Supposons la distance D assez grande pour que l'on puisse traiter chaque électrode isolément.

On aura, entre la première sphère prise seule et le plan équatorial,

$$R_a = \frac{1}{a} \frac{1}{4\pi k},$$

et de même, pour la deuxième sphère,

$$R_{a'} = \frac{1}{a'} \frac{1}{4\pi k}$$

ce qui donne, pour ces deux portions du volume associées en série,

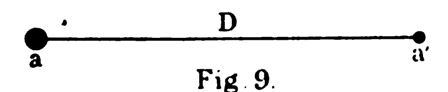


Fig. 9.

une résistance totale

(7) $$R = \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) \frac{1}{4\pi k}.$$

L'approximation est évidemment de l'ordre de $\frac{a + a'}{D}$.

Le problème est analogue au problème électrostatique : soient m et m' les charges électrostatiques des deux sphères, D la distance de leurs centres ; le potentiel au centre de la sphère A est sensiblement

$$V_1 = \frac{m}{a} + \frac{m'}{D}$$

le second terme étant seulement approximatif, puisque les points de la surface de la deuxième sphère ne coïncident pas avec son centre.

De même pour A'

$$V_2 = \frac{m'}{a'} + \frac{m}{D}.$$

Si on suppose qu'il y a seulement deux électrodes, il faudra faire $m' = -m$, d'où

$$V_1 = m\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{D}\right)$$

$$V_2 = -m\left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{D}\right)$$

et

$$V_1 - V_2 = m\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} - \frac{2}{D}\right].$$

On en déduit que la résistance serait dans le problème de conductibilité

$$(8) \qquad R = \frac{1}{4\pi k}\left[\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} - \frac{2}{D}\right].$$

Cette seconde expression est évidemment plus approchée que la précédente. On connait d'ailleurs la solution exacte du problème électrostatique des deux sphères, il n'y a qu'à la transposer en galvanisme suivant la règle générale indiquée plus haut.

CHAPITRE III

ÉVALUATION APPROXIMATIVE DES RÉSISTANCES
LORD RAYLEIGH

90. Méthode d'approximation de Lord Rayleigh. — Il faut souvent pouvoir faire une approximation de sens et de grandeur connus : Lord Rayleigh a donné une méthode applicable au problème qui nous occupe et aux problèmes analogues (écoulement des liquides, etc.).

Elle consiste à remplacer V par une autre fonction connue satisfaisant d'une façon d'une façon approchée aux conditions auxquelles doit satisfaire V. Soit ψ une fonction telle qu'on ait :

$$(9) \qquad \begin{cases} \Delta\psi = o & \text{dans le conducteur ;} \\ \left.\begin{array}{l} \psi = \psi_1 \\ \psi = \psi_2 \end{array}\right\} & \text{aux électrodes;} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n} = o & \text{à la surface limite ;} \end{cases}$$

mais sans que ψ et ses dérivées soient nécessairement continues dans tout l'intervalle.

91. — Appliquons le théorème de Green au volume limité par les deux, électrodes aux potentiels V_1 et V_2 et par la surface limite extérieure on a :

$$\int V \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int V\Delta V d\tau + \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

en désignant par $d\tau$ l'élément de volume $dxdydz$.

Or $\frac{\partial V}{\partial n}$ est nul en tout point de la surface extérieure et les i
tégrales $\int \frac{\partial V}{\partial n} dS$ relatives aux deux électrodes sont égales et
signes contraires ; de plus, ΔV est nul dans le conducteur, de soı
que l'égalité donne :

$$(V_1 - V_2)\int \frac{\partial V}{\partial n} dS = \int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

l'intégrale de surface devant être étendue à l'électrode de potentiel V
Il résulte de là qu'on peut écrire :

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} R &= k\frac{V_1 - V_2}{\int \frac{\partial V}{\partial n} dS} \\ &= \frac{\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}{k\left[\int \frac{\partial V}{\partial n} dS\right]^2} \\ &= \frac{(V_1 - V_2)^2}{k\int \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}. \end{aligned}\right.$$

92. — D'autre part, posons :

$$\Delta_1(\psi) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2$$

et cherchons l'expression

$$\int \Delta_1(\psi) d\tau,$$

on a :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 = \left[\frac{\partial(\psi - V)}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial V}{\partial x}\right]^2 + 2\left[\frac{\partial(\psi - V)}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\right].$$

Par conséquent, en posant $\psi - V = u$, on a

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \int \Delta_1(\psi)d\tau &= \int \Delta_1(V)d\tau + \int {}_1(u)d \\ &+ 2\int\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right)d\tau. \end{aligned}\right.$$

Mais la formule de Green donne :

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)d\tau &= \int V\frac{\partial u}{\partial n}dS \\ &= \int u\frac{\partial V}{\partial n}dS. \end{aligned}\right.$$

La surface limite n'intervient dans aucune de ces intégrales de surface puisque $\frac{\partial V}{\partial n}$ et $\frac{\partial u}{\partial n}$ sont nuls en tous ses points ; on n'a à s'occuper que des électrodes et des surfaces de discontinuités.

93. — Si $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ est seul discontinu sur une surface, on prendra la deuxième intégrale, où $\frac{\partial V}{\partial n}$ étant continu, il n'y aura pas de difficultés : supposons qu'on s'impose aux électrodes les conditions

$$\psi_1 = V_1 \qquad \psi_2 = V_2$$

u est nul sur les électrodes et l'intégrale de surface disparait : on aura alors

$$\int \Delta_1(\psi)\,d\tau = \int \Delta_1(V)\,d\tau + \int \Delta_1(u)\,d\tau.$$

Comme la dernière intégrale est toujours positive, il vient

$$\int \Delta_1(\psi)d\tau > \int \quad {}_1(V)d\tau,$$

et en prenant pour R l'expression

$$(13) \qquad R' = \frac{(\psi_1 - \psi_2)^2}{k \int \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right] d\tau}$$

on aura une solution par défaut, au moyen de la seule fonction ψ.

94. — Supposons que l'on ait trouvé une autre forme de solution approchée telle que $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ soit continu, mais ψ discontinu à travers une certaine surface.

Nous prendrons alors la première intégrale de surface de l'expression (12). Imposons-nous la condition

$$\int \frac{\partial\psi}{\partial n}\,dS = \int \frac{\partial V}{\partial n}\,dS$$

aux deux électrodes.

L'intégrale de surface disparait encore et l'on aura comme précédemment

$$\int \Delta_1(\psi)d\tau > \int \Delta_1(V)d\tau.$$

et l'expression

14
$$R' = \frac{\int \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau}{k\left[\int \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS\right]^2}$$

nous donne au moyen de la seule fonction ψ, une solution par excès.

On aura une limite supérieure de l'erreur commise, en prenant la différence $R'' - R'$.

95. Application. — Fil cylindrique aboutissant dans un espace conducteur indéfini limité par un plan perpendiculaire au fil.

L'étude de ce cas est importante pour la construction de l'étalon de résistance constitué par du mercure contenu dans un tube de verre cylindrique aboutissant à un vase de grandes dimensions où plonge une électrode placée très loin et de résistance négligeable. Ce qui importe, c'est de connaître la perturbation à l'extrémité du tube.

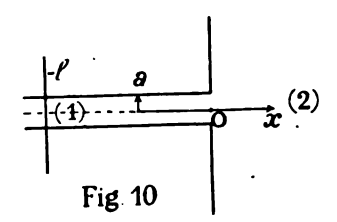


Fig. 10

Si le diamètre du tube est très petit par rapport à sa longueur et aux dimensions du vase, la correction à faire pourra être petite. La correction à faire à la longueur sera de l'ordre du diamètre du tube : si celui-ci est égal au $\frac{1}{1000}$ de la longueur et si l'on calcule la correction au $\frac{1}{10}$ on aura la résistance au $\frac{1}{10\,000}$.

96. Calcul par défaut. — Nous prendrons l'axe des x dans le sens du tube ; considérons d'abord le cas où ψ est continu, mais sa dérivée discontinue ; dans l'espace (1) nous prendrons

$$\psi = x.$$

Dans l'espace (2), il faut que ψ soit uniforme sur le plan $x = o$ à l'intérieur du cercle de rayon a. Pour cela, en nous reportant au problème électrostatique nous supposerons une densité fictive σ à l'intérieur de ce cercle, telle qu'elle donne un potentiel uniforme pour $r < a$; nous prendrons alors :

$$\psi = A\left(1 - \int \frac{\sigma dS}{r}\right),$$

la valeur de σ étant telle qu'à l'intérieur du cercle l'intégrale soit égale à l'unité. Dans ces conditions ψ est bien continu et l'on peut appliquer la formule 13 ; on a :

$$\psi_1 = -l,$$
$$\psi_2 = A,$$

car à l'infini l'intégrale double est négligeable.

D'autre part il faut calculer :

$$\int \Delta_1 (\psi) d$$

qui, d'après la formule de Green, se ramène à

$$\int \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

étendue aux électrodes et à la surface de discontinuité.

Sur la première électrode

$$\psi = -l,$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = -1$$

et

$$\int \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = + \pi a^2 l.$$

Sur la surface de discontinuité

$$\psi = o$$

à l'intérieur du cercle de a,

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = o$$

à l'extérieur ; l'intégrale est nulle.

Occupons-nous enfin de l'électrode située à l'infini, $\psi = A$; si on prend pour cette électrode une sphère de très grand rayon ρ, il est facile de voir, d'après l'analogie électrostatique, que $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ est constant et égal à $\frac{2\,Aa}{\pi\rho^2}$; l'intégrale est donc :

$$\frac{2\,A^2 a}{\pi\rho^2} \int dS = \frac{2\,A^2 a}{\pi\rho^2} \cdot 2\pi\rho^2 = 4\,A^2 a.$$

Finalement on a pour la résistance cherchée R :

$$R > \frac{(l + A)^2}{\pi a^2 l + 4 A^2 a} \cdot \frac{1}{k}.$$

Cette inégalité est vraie quel que soit A, donc aussi quand A est tel que la fraction soit maximum ; or cela a lieu pour

$$A = \frac{\pi a}{4}$$

et le maximum de la fraction est :

$$\frac{l + \frac{\pi a}{4}}{\pi a^2}$$

de sorte qu'on a :

$$R > \frac{l + \frac{\pi a}{4}}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{k}. \tag{15}$$

97. Calcul par excès. — Supposons ψ discontinu, mais $\frac{d\psi}{dn}$

continu. Dans le premier milieu nous prendrons encore $\psi = x$ et dans le plan limite on aura $\frac{\partial\psi}{\partial x} = 1$. Dans le deuxième milieu, si nous supposons une distribution uniforme de densité σ sur le cercle de rayon a, la force électrique au voisinage est $2\pi\sigma$ donc $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ serait $-2\pi\sigma$, et, pour que cette quantité soit encore égale à 1, il faudra prendre

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi}.$$

Nous prendrons alors :

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\int \frac{dS}{r}.$$

Cherchons la valeur de ψ en un point P du cercle. A l'élément M correspond une charge

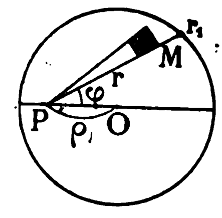


Fig. 11

$$-\frac{1}{2\pi} r dr d\varphi,$$

qui produit au point P le potentiel

$$-\frac{1}{2\pi} dr d\varphi.$$

Le potentiel dû aux masses comprises entre φ et $\varphi + d\varphi$ sera donné par

$$-\frac{1}{2\pi} d\varphi \int_0^{r_1} dr$$

la limite r_1 étant, comme il est facile de le voir,

$$r_1 = \rho \cos \varphi + \sqrt{a^2 - \rho \sin^2 \varphi};$$

d'où

$$-\frac{1}{2\pi} d\varphi \int_0^{r_1} dr = -\frac{1}{2\pi} d\varphi\left[\rho \cos \varphi + \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}\right].$$

Le potentiel total sera

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho \cos \varphi d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

La première intégrale est nulle ; il reste

$$\psi = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi.$$

Ceci posé, il faut calculer l'expression (14)

$$R' = \frac{\int \Delta_1 \psi d\tau}{k\left[\int \frac{\partial \psi}{\partial n} dS\right]^2}.$$

L'intégrale du dénominateur qui ne porte que sur l'une des électrodes est égale à πa^2.

L'intégrale du numérateur est transformée par la formule de Green en

$$\int \psi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

étendue aux électrodes et à la surface de discontinuité.

Sur la première électrode elle donne comme précédemment

$$\pi a^2 l.$$

Elle est nulle sur la deuxième électrode et sur la partie du plan de discontinuité extérieure au cercle a.

A l'intérieur de ce dernier, où $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 1$, elle est égale à

$$\int \psi dS = -4 \int_0^a \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - \rho^2 \sin^2 \varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{8}{3} a^3.$$

Finalement on a pour la résistance cherchée R

$$R < \frac{l + \frac{8}{3}\frac{a}{\pi}}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{k}.$$

98. Résultat. — En résumé

$$\frac{1}{k} \frac{l + \frac{\pi}{4} a}{\pi a^2} < R < \frac{l + \frac{8}{3}\frac{a}{\pi}}{\pi a^2} \cdot \frac{1}{k}.$$

Le terme à ajouter à l est compris entre

$$0{,}785\,a \qquad \text{et} \qquad 0{,}849\,a.$$

Ce problème est le même que celui de l'écoulement lent d'un liquide non visqueux par l'extrémité d'un tube.

Il se rattache directement aussi à l'influence de l'ouverture dans l'espace libre sur la longueur apparente d'un tuyau sonore. Les plus récentes expériences donnent comme correction à l'extrémité libre le terme additif 0,81 R qui est bien dans les limites que nous avons données d'après lord Rayleigh.

CHAPITRE IV

RÉSISTANCE D'UN CYLINDRE. — ÉLECTRODES DIVERSES

99. — La régularité de toutes les expériences sur les fils cylindriques, sans précautions spéciales pour le mode d'attache, montre que la distribution uniforme du courant dans la section droite s'établit d'elle même. Ainsi toutes les irrégularités variables avec le mode d'attache des fils ne se font sentir qu'à une petite distance des nœuds ou sommets. C'est un résultat expérimental que la théorie mathématique doit aussi nous fournir, en le complétant par une détermination, au moins approchée, de la valeur de ces variations dans divers cas. On peut se donner la distribution des densités de courant dans une section droite d'un fil indéfini et chercher la distribution des potentiels à une distance quelconque. On peut encore se donner deux distributions de densité identiques aux deux extrémités d'un cylindre de longueur finie et chercher la distribution dans une section droite intermédiaire.

Nous prendrons comme coordonnées la distance z, comptée sur l'axe, la distance à l'axe r.

Les conditions à satisfaire sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta V &= o \quad \text{à l'intérieur du cylindre ;} \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= o \quad \text{à la surface du cylindre ou } r = a \text{ ;} \\ -k\frac{\partial V}{\partial z} &= j(r) \ \text{fonction de } r \text{ donnée, sur la base} \end{aligned}\right.$$

Le changement de variable donne pour la première équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = o,$$

100. — Supposons, en particulier, que tout est symétrique autour de l'axe du cylindre ; comme φ n'intervient pas, l'équation de Laplace devient

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = o.$$

La solution la plus simple, est

$$V = A_0 z$$

indépendante de r ; qui correspond à la distribution de courant, uniforme dans toute la section, à toute distance

$$j = -k\frac{\partial V}{\partial z} = -kA.$$

On a facilement une infinité d'autres solutions simples de de Laplace : l'équation, en posant

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \lambda^2 V$$

ce qui donne

$$(4) \qquad V = R\,(Ae^{\lambda z} + Be^{-\lambda z}),$$

Cette expression est le produit de deux facteurs dont l'un ne dépend que de z et l'autre que de r, ce qui permettra de satisfaire facilement aux conditions à la surface.

R est une fonction de r que nous définirons en substituant l'expression (4) dans l'équation (2) ce qui donne

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + \lambda^2 R = o.$$

101. — Ce type d'équation a été étudié par Bessel et les solutions

portent le nom de fonctions de Bessel. Dans l'équation (5), R ne dépend que du produit λr, et si l'on pose

$$\lambda r = x,$$

on trouve l'équation dont Bessel désigne la solution par J_0 :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial J}{\partial x} + J = o, \tag{6}$$

on aura alors

$$R = J(\lambda r)$$

et par suite

$$V = (A\,e^{\lambda z} + B\,e^{-\lambda z})\,J(\lambda r). \tag{7}$$

On peut trouver une solution de l'équation (6) developpée suivant les puissances paires de x, ce qui donne à l'origine

$$\frac{\partial J}{\partial x} = o$$

$J = o$ a donc une valeur maximum que nous prendrons égale à 1; il suffira de multiplier par un facteur numérique à déterminer dans chaque cas.

La fonction J présente des oscillations dont l'amplitude décroit indéfiniment; elle a une infinité de maximum et de minimum, une infinité de racines réelles, dont aucune double, qui tendent à s'espacer d'une manière uniforme.

102. — La condition $\frac{\partial V}{\partial r} = o$ donne $\frac{\partial J}{\partial r} = o$ et par suite

$$\frac{\partial J}{\partial x} = o.$$

Cette équation doit être satisfaite pour $r = a$, et détermine une infinité de valeurs réelles distinctes de λ (Ch. suivant).

Il y a donc aussi une infinité de valeurs de x ou de λr pour les quels on a

$$\frac{\partial J}{\partial x} = o$$

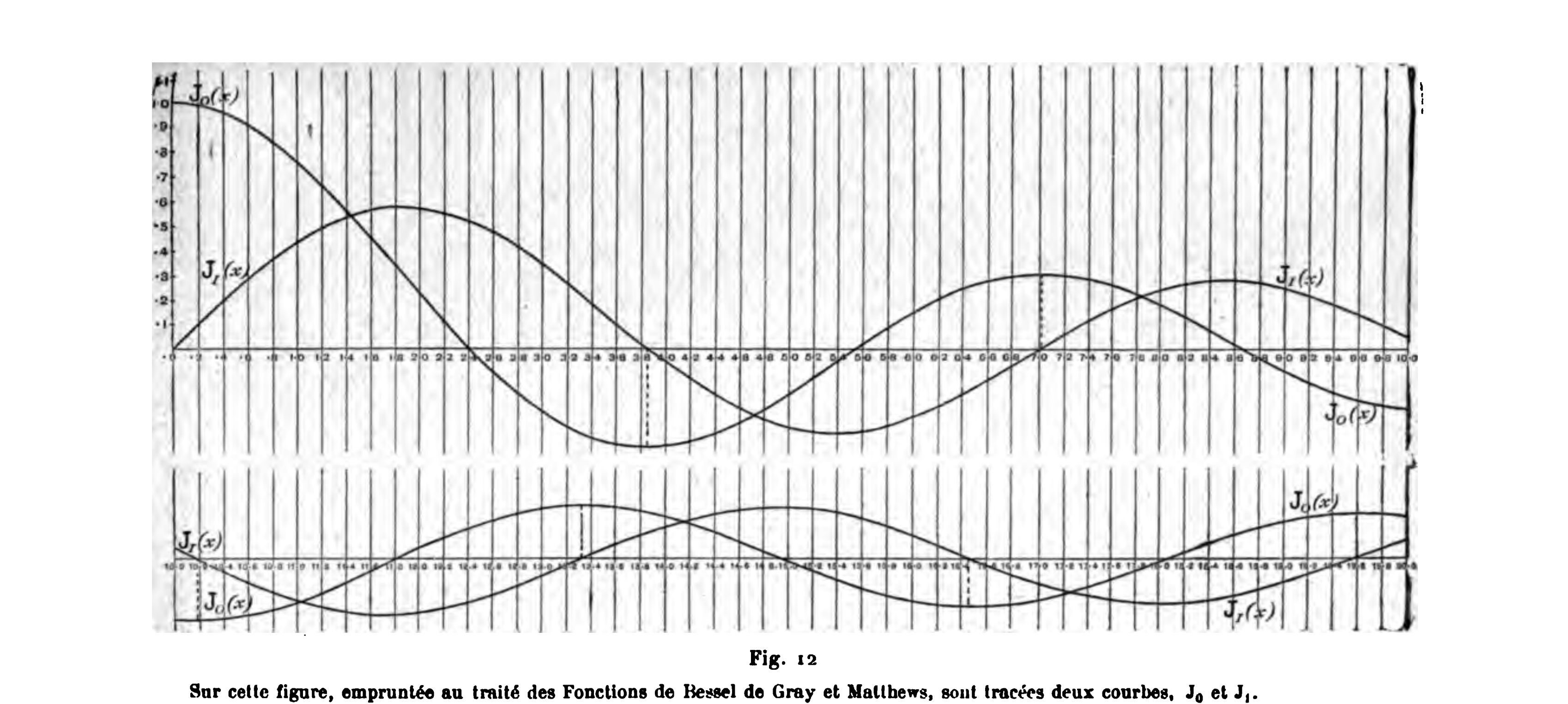


Fig. 12

Sur cette figure, empruntée au traité des Fonctions de Bessel de Gray et Matthews, sont tracées deux courbes, J_0 et J_1.
J_0 satisfait à l'équation (6).
J_1 satisfait à l'équation $\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial J}{\partial x} + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) J = o$; J_1 est d'ailleurs égale et de signe contraire à $\frac{\partial J_0}{\partial x}$.

Considérons une de ces valeurs α_1 ; la valeur correspondante de λ est donnée par

$$\lambda_1 a = \alpha_1$$

qui satisfait à la condition à la surface du cylindre.

Si l'on prend la première racine, le flux est nul à travers la surface extérieure seule. Mais si on prend la deuxième racine α_2 à laquelle correspond λ_2 on pourra trouver entre o et a une valeur r_1 du rayon pour laquelle on a

$$\lambda_2 r_1 = \alpha_1$$

et par suite $\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right) = o$, pour $r = r_1$.

Il y a donc une surface cylindrique intérieure à travers laquelle le flux est nul et qui partage le cylindre total en deux parties indépendantes l'une de l'autre. A mesure que l'on choisit une racine de rang plus élevée, on décompose ainsi le cylindre en régions cylindriques indépendantes de plus en plus nombreuses où la propagation se fait sans échanges de l'une à l'autre.

103. — La distribution que donne la solution (7) est la même à toute distance de la base

$$(8) \qquad j = -k\frac{\partial V}{\partial z} = -k\lambda\,(Ae^{\lambda z} - Be^{-\lambda z})\,J(\lambda r)$$

Si on se donne un cylindre indéfini du côté des z positifs et une base unique pour $z = o$, il faudra faire $A = o$.

Pour un cylindre limité aux deux bouts par deux faces sur lesquelles la distribution des densités est la même, il est commode de placer l'origine au milieu du cylindre ; soit $2h$ sa longueur, on a à une extrémité

$$j = -k\lambda\left[Ae^{\lambda h} - Be^{-\lambda h}\right]J(\lambda r),$$

à l'autre

$$j = -k\lambda\left[Ae^{-\lambda h} - Be^{\lambda h}\right]J(\lambda r).$$

Pour que la distribution soit la même il faut avoir $B = - A$, ce qui donne

$$(9) \quad \begin{cases} j = -kA\lambda(e^{\lambda z} + e^{-\lambda z})\, J(\lambda r) \\ V = A\,(e^{\lambda z} - e^{-\lambda z})\, J(\lambda r). \end{cases}$$

et nous aurons une solution plus générale en ajoutant un nombre quelconque de solutions simples et nous pourrons prendre

$$(10) \quad j = -kA_0 - k\sum A_n\lambda_n(e^{\lambda_n z} + e^{-\lambda_n z})\, J(\lambda_n r).$$

La distribution à la base est alors

$$(11) \quad j = -kA_0 - k\sum A_n\lambda_n(e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h})\, J(\lambda_n r).$$

104. — Remarquons que l'équation (6) peut s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial J}{\partial x}\right) + xJ = o.$$

Intégrons cette équation de o à λa ; il vient

$$(12) \quad \left[x\frac{\partial J}{\partial x}\right]_{\lambda a} + \int_o^{\lambda a} Jx\,dx = o$$

Le premier terme est nul, puisque $\frac{\partial J}{\partial x}$ est nul à la surface ; il reste

$$(13) \quad \int_o^{\lambda a} Jx\,dx = o$$

ce qui exprime que l'intensité totale relative à une des solutions simples est nulle, j étant proportionnel à J.

Donc si on prend la première racine α_1, le courant entre dans la partie centrale et sort par la couronne extérieure.

Si on prend la deuxième racine, le courant entre par le centre et par la couronne extérieure et sort par la couronne intermédiaire de

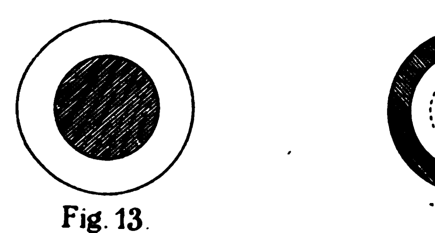


Fig. 13. Fig 14

part et d'autre du cylindre de rayon r_1 que ne traverse aucun flux d'électricité et ainsi de suite.

105. — Il faut déterminer les coefficients A_o, A_n, de manière que la distribution dans la base, (11) soit identique à une distribution donnée arbitrairement.

Multiplions les deux membres de l'équation (11) par xdx ou $\lambda^2 rdr$ intégrons de $r = o$ à $r = a$.

$$(14) \quad \begin{cases} \lambda^2 \int_o^a jrdr = -kA_o\lambda^2 \int_o^a rdr \\ \qquad - k\sum A_n\lambda_n(e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h}) \int_o^a \lambda^2 rdr J(\lambda r). \end{cases}$$

Cette dernière intégrale est nulle comme nous venons de le voir; il reste pour déterminer A_o :

$$(15) \quad A_o = \frac{-2}{ka^2}\int_o^a jrdr = \frac{-2}{k\pi a^2}\int_o^a j.2\pi rdr = -\frac{2I}{k\pi a^2}.$$

La partie constante de la densité est celle qui correspond à l'intensité totale, supposée uniforme, du courant qui traverse l'une des bases.

106. — On peut déterminer chacun des autres coefficients par un artifice analogue à celui qu'on emploie pour calculer les coefficients de la série de Fourier. L'équation (6) peut s'écrire :

$$(16) \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J}{\partial r}\right) + \lambda^2 r J = o$$

nous désignerons par $J_1, J_2 \ldots$ les solutions correspondant aux équations où l'on a remplacé λ par $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$.

Soit :

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_1}{\partial r}\right) + \lambda_1^2 r J_1 = o.$$

Multiplions cette équation par J_2 :

$$J_2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_1}{\partial r}\right) + \lambda_1^2 J_1 J_2 = o.$$

En formant l'équation analogue relative à λ_2 et retranchant on a :

$$(17) \qquad J_2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_1}{\partial r}\right) - J_1\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_2}{\partial r}\right) + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2) r J_1 J_2 = o.$$

Intégrons de o à a et remarquons qu'on a :

$$J_2\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_1}{\partial r}\right) - J_1\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial J_2}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[r\left\{J_2\frac{\partial J_1}{\partial r} - J_1\frac{\partial J_2}{\partial r}\right\}\right].$$

Il vient :

$$(18) \qquad \left[r\left(J_2\frac{\partial J_1}{\partial r} - J_1\frac{\partial J_2}{\partial r}\right)\right]_o^a + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\int_o^a rJ_1J_2dr = o.$$

Or $\frac{\partial J_1}{\partial r}$ et $\frac{\partial J_2}{\partial r}$ sont nuls pour $r = a$ et pour $r = o$, et si on suppose λ_1 différent de λ_2 l'équation (18) donne :

$$(19) \qquad \int_o^a rJ_1J_2dr = o.$$

Ceci posé, multiplions l'équation (11) par $J_n r dr$ on a :

$$\int_o^a jJ_n r dr = -kA_n\lambda_n\,(e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h})\int_o^a [J(\lambda_n r)]^2 r dr$$

car le coefficient de A_o est nul comme on l'a vu précédemment et tous les autres aussi à cause de l'équation (19). Le coefficient de A_n est au contraire différent de o car dans l'intégrale correspondante tous les termes sont positifs ; on a donc :

$$A_n = \frac{-\int_o^a jJ(\lambda_n r) r dr}{k\lambda_n(e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h})\int_o^a [J(\lambda_n r)]^2 r dr}.$$

107. — Déterminons maintenant l'intégrale du dénominateur : l'équation (18) est satisfaite quels que soient λ_1 et λ_2 ; elle le sera aussi pour λ_2 et une quantité voisine $\lambda_2 + d\lambda_2$ et par conséquent on pourra la dériver par rapport à λ_2 : mais

$$\frac{\partial J_2}{\partial \lambda_2} = \frac{r}{\lambda_2}\frac{\partial J_2}{\partial r}.$$

L'équation dérivée devient alors, $\frac{\partial J_1}{\partial r}$ et $\frac{\partial J_2}{\partial r}$ étant toujours nuls pour $r = o$,

$$a\left[\frac{r}{\lambda_2}\frac{\partial J_1}{\partial r}\frac{\partial J_2}{\partial r} - J_1\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r}{\lambda_2}\frac{\partial J_2}{\partial r}\right)\right]_a - 2\lambda_2\int_o^a rJ_1J_2 dr +$$

$$+ (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\int_o^a \frac{r^2}{\lambda_2} J_1 \frac{\partial J_2}{\partial r} dr = o.$$

Faisant dans cette équation $\lambda_2 = \lambda_1$, d'où $J_2 = J_1$, et supprimons l'indice, il vient

(20) $$\int_o^a 2J^2 r dr = \frac{a^2}{\lambda^2}\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)_a^2 + a^2 J^2(\lambda a),$$

en tenant compte de l'équation (16).

Dans le cas actuel ; le premier terme du 2[e] membre est nul, et on a

$$\int_o^a 2J^2 r dr = a^2[J(\lambda a)]^2.$$

D'où, finalement :

(21) $$A_n = \frac{-\int_o^a jJ(\lambda_n r) r dr}{h\lambda_n(e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h}) a^2 [J(\lambda_n a)]^2}.$$

La question est maintenant résolue et V est donné par l'expression dont nous venons de calculer les coefficients

(22) $$V = A_o z + \sum A_n(e^{\lambda_n z} - e^{-\lambda_n z}) J(\lambda_n r).$$

108. — Dans les premiers problèmes que nous avons étudiés nous avons supposé que le courant entrait par une électrode de forme connue sur laquelle le potentiel était constant, sans nous donner la distribution de la densité du courant le long de la base. Le problème actuel est donc différent puisque nous nous donnons au contraire la distribution des densités de courant et que nous en déduisons la distribution du potentiel sur la base en faisant $z = h$ dans la formule (22). Si le courant n'entre que par une partie de la base, on prendra une densité nulle sur la base là où il n'y a pas de courant.

109. Electrode de grande conductibilité. — Dans ce cas, où la surface de base n'est pas entièrement occupée par l'électrode, le problème de l'électrode de grande conductibilité n'est pas susceptible de solutions simples, par les fonctions de Bessel. Les conditions sur la base, z = constante, seraient alors de deux natures différentes :

$$r < b \qquad V = \text{constante}$$

$$b < r < a \qquad \frac{\partial V}{\partial z} = o$$

et les solutions simples ne peuvent pas satisfaire aux deux conditions à la fois.

D'une manière générale, l'emploi des solutions simples exige que toute la portion de surface le long de laquelle règne une même condition (ici, la paroi cylindrique, et deux couronnes sur les bases) soit représentée par une seule variable. On n'arrive à traiter le problème qu'en choisissant des coordonnées qui donnent pour une variable la région où V est constant, et pour une autre celle où la dérivée est nulle.

De là résulte la difficulté beaucoup plus grande des problèmes dans lesquels la ligne de démarcation physique entre les deux conditions superficielles différentes n'est pas en même temps une ligne d'intersection de deux surfaces géométriques distinctes sous un angle fini, droit de préférence.

110. — Kirchhoff a traité ce problème particulier en adoptant sur l'électrode la même distribution de densité que celle qui donnerait sur un disque plat seul dans un milieu indéfini un potentiel constant; cette distribution est connue en électrostatique et l'on a :

$$j = \frac{I}{2\pi b \sqrt{b^2 - r^2}}.$$

b étant le rayon du disque ; ce n'est qu'une approximation, mais Kirchhoff a admis qu'on pourrait s'en contenter si l'électrode était suffisamment petite.

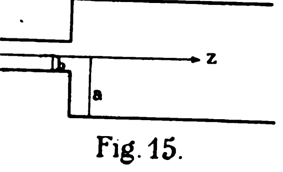


Fig. 15.

Si b est assez petit pour qu'on puisse regarder $J(\lambda_n r)$ comme constant et égal par suite à $J(\lambda_n o)$ à l'intérieur du cercle électrode, on aura

$$(23) \qquad \int^a j\, J(\lambda_n r)\, 2r\,dr = J(\lambda_n o) \int_o^a j\; 2r\,dr$$

$$\int_0^a j\,J(\lambda_n r) 2 r dr = \frac{1}{\pi}\int_0^a j\ 2\pi r dr$$
$$= \frac{I}{\pi},$$

I étant l'intensité totale du courant.

L'expression de V sera alors

$$(24) \qquad V = \frac{-I}{k\pi a^2}\left\{ z + \sum \frac{(e^{\lambda_n z} - e^{-\lambda_n z}) J(\lambda_n r)}{\lambda_n (e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h}) [J(\lambda_n a)]^2} \right\}.$$

Ceci s'applique au cas où l'on fait arriver le courant dans un électrolyte par une électrode à la Wollaston.

111. — Toutefois on ne peut avoir une représentation exacte des phénomènes qu'assez loin de l'électrode car il y a toujours pour les coefficients un rang n à partir duquel il faudrait prendre la formule exacte. Il reste dans le voisinage immédiat de l'électrode une région que l'on ne peut déterminer avec précision ; quelle est son étendue ?

Les termes mal déterminés sont ceux où $J(\lambda_n r)$ varie beaucoup à la surface de l'électrode. On a par exemple $J_0(\lambda r) = 0{,}5$ pour $\lambda r = 1{,}52$; si le rayon b de l'électrode est $0{,}1\ a$, J_0 variera de 1 à 0,5 dans l'étendue de l'électrode dès la 5[e] racine ($\lambda_5\, a = 16,5$) ; si le rayon $b = 0{,}01\ a$, cela n'arrivera qu'à partir de la 48[e] racine ($\lambda_{48}\, a = 151$).

112. — D'autre part l'influence de la distance à l'électrode intervient par le facteur

$$e^{\lambda_n z} - e^{-\lambda_n z}.$$

Si on prend l'électrode comme origine ce qui revient à changer z en $(z' - h)$, ce facteur se réduit au terme

$$e^{-\lambda z'}.$$

Or les valeurs $\alpha_n = \lambda_n a$ varient de la façon suivante

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 3,83,\\
\alpha_2 &= 7,01,\\
\alpha_3 &= 10,02,\\
\alpha_4 &= 13,3,\\
\alpha_5 &= 16,5,\\
\alpha_6 &= 19,6.
\end{aligned}$$

Les accroissements sont sensiblement égaux à π dès les premiers termes et les α sont sensiblement de la forme

$$\lambda_n a = n\pi + \frac{\pi}{4}.$$

En particulier si l'on prend

$$\lambda_n z = 2,3,$$

on a

$$e^{-\lambda_n z} = \frac{1}{10}.$$

Or la 7e racine étant sensiblement égale à 23 il suffira pour avoir cette valeur $\frac{1}{10}$ que nous nous placions à une distance à de l'ordre du $\frac{1}{10}$ du rayon a ; à partir de là, l'influence des termes éloignés sera très petite.

113. Résistance du cylindre. — Examinons maintenant quelle est, dans le problème général, la résistance du cylindre considéré : on ne peut pas la définir entre les bases qui ne sont pas nécessairement à un potentiel constant, mais on peut la définir entre deux surfaces de niveau voisines des bases : supposons d'abord que nous prenions celles qui passent par les points $z = \pm h$ de l'axe ; ces surfaces de niveau se confondront avec les bases si la distribution des densités est convenablement choisie ; sinon ce seront deux surfaces voisines de la base, d'un côté ou de l'autre.

Nous pouvons nous donner la densité sur la base sous la forme

$$j = \mathrm{I}f(r),$$

avec la condition

$$\int_0^a f(r) 2\pi r dr = 1,$$

I étant l'intensité totale du courant; $f(r)$ un coefficient de distribution. C'est le quotient $-\frac{V}{I}$ qui définit la résistance entre la base et le centre : pour la surface équipotentielle qui passe par le point $z = +h$ le potentiel est le même qu'au centre de la base ; or sur la base

$$V = \frac{I}{k\pi a^2}\left[h + a\sum \frac{(e^{\lambda_n h} - e^{-\lambda_n h})J(\lambda_n r)}{a\lambda_n(e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h})[J(\lambda_n a)]^2}\right].$$

Au centre, r est nul, par suite $J = 1$, et la résistance est

$$(25)\qquad R_1 = \frac{1}{k\pi a^2}\left[h + a\sum \frac{(e^{\lambda_n h} - e^{-\lambda_n h})}{e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h}}\frac{1}{a\lambda_n[J(\lambda_n a)]^2}\right].$$

114. — On aurait pu prendre la surface équipotentielle qui passe par les bords de la base ; alors sur cette surface pour $z = +h$ on aura $r = a$, et

$$(26)\qquad R_2 = \frac{1}{k\pi a^2}\left[h + a\sum \frac{(e^{\lambda_n h} - e^{-\lambda_n h})}{(e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h})}\frac{1}{a\lambda_n J(\lambda_n a)}\right].$$

115. — Dans le cas particulier où il y a au centre de la base une petite électrode, cherchons ce que deviennent ces formules :

La première donne une valeur de R_1 qui est infinie, car sous le signe Σ, le facteur $\frac{e^{\lambda_n h} - e^{-\lambda_n h}}{e^{\lambda_n h} + e^{-\lambda_n h}}$ est très peu inférieur à l'unité lorsque $\lambda_n h$ est grand, et s'en rapproche indéfiniment ; et il en est de même de $a\lambda_n[J(\lambda_n a)]^2$ comme le montre l'expression limite donnée au chapitre sur les fonctions de Bessel. Les termes de la série tendent donc à

devenir tous égaux à 1 lorsque leur rang croît. Ainsi toute la résistance est alors localisée au voisinage de l'électrode.

La seule formule qui puisse servir est la deuxième, relative à deux surfaces de niveau déjà éloignées des électrodes : elle donne une résistance qui dépend des dimensions du cylindre et de la perturbation due à l'électrode.

Si la longueur du cylindre n'est pas très grande par rapport au diamètre de la base, le calcul sera pénible parce que les deux bases ont une influence appréciable l'une sur l'autre et qu'il faut prendre tous les termes.

Si la longueur est égale à une vingtaine de fois le diamètre de la base, les coefficients des termes importants au voisinage d'une base ne dépendront pas de l'autre. Dans ce cas, on peut regarder la résistance comme proportionnelle à une longueur fictive, égale à la longueur vraie augmentée d'un terme correctif proportionnel au diamètre et dépendant de la surface de niveau choisie.

Quant à la série sous le signe Σ, elle est convergente grâce à l'alternance des signes et à la rapidité avec laquelle croît $\lambda_n a$. Kirchhoff a donné sa valeur numérique

$$\sum = 0,38479.$$

On pourrait traiter le même problème dans le cas ou le courant entre par une électrode circulaire sans épaisseur de rayon b ; les surfaces de niveau sont alors sensiblement des tores à section circulaire près de l'électrode, puis la section méridienne de la surface prend la forme d'une lemniscate et finalement les surfaces de niveau deviennent des plans.

Les coefficients, A_0 ... A_n s'obtiendront encore d'une manière simple ; il suffira de remplacer $J(\lambda_n a)$ qui était égal à 1 par $J(\lambda_n b)$ dans l'équation (23).

CHAPITRE V

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION J_0 DE BESSEL (1)

116. — L'équation à laquelle satisfont les fonctions J_0 de Bessel

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial J}{\partial x} + J = 0.$$

peut être satisfaite par une série ordonnée suivant les puissances positives paires de x

$$(2) \qquad J = A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + \dots + A_n x^{2n} + \dots$$

Pour en calculer les coefficients, formons les deux dérivées

$$\frac{\partial J}{\partial x} = 2A_1 x + \dots + 2nA_n x^{2n-1} + (2n+2)A_{n+1}x^{2n+1} + \dots$$

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} = 2A_1 + \dots + 2n(2n-1)A_n x^{2n-2} + (2n+2)(2n+1)A_{n+1}x^{2n} + \dots$$

et portons les dans l'équation (1).

En égalant les termes de degré n, on a la relation entre les coefficients consécutifs :

$$(3) \qquad A_n + A_{n+1}(2n+2)^2 = 0$$

(1) Pour une étude d'ensemble des fonctions de Bessel, voir :
GRAY AND MATTEWS. — *Treatise on Bessel Functions* (Macmillan).
RIEMANN-WEBER. — *Partielle Differential-Gleichungen*, 4e édit. (Wieweg) 1900, en particulier t. I, ch. VIII et t. II, ch. IV.

d'où

$$A_1 = -\frac{A_0}{(2)^2}$$

$$A_2 = -\frac{A_1}{(4)^2} = +\frac{A_0}{(2.4)^2}$$

. . . .

$$A_n = (-1)^n \frac{A_0}{(2.4 \ldots 2n)^2}$$

Ces termes ont des signes alternés; leurs dénominateurs croissent vite et la convergence est rapide, ce qui permet d'employer la série commodément quand x n'est pas trop grand.

A_0 est arbitraire, nous le prendrons égal à 1 et nous aurons

$$(4) \qquad J_0 = 1 - \frac{x^2}{(2)^2} + \frac{x^4}{(2.4)^2} + \ldots\ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2.4 \ldots 2n)^2} + \ldots$$

J_0 n'est pas l'intégrale générale puisque, même en prenant A_0J_0, il n'y a qu'une constante arbitraire, et que l'équation est du deuxième ordre.

117. — Cette intégrale particulière J_0 est, pour nous, la plus importante. Cherchons les racines de l'équation $J_0 = o$, en admettant qu'il y en ait. Nous savons à l'avance que s'il y a des racines :

a) elles seront paires;

b) il n'y en aura pas qui soient imaginaires pures; car, pour de telles valeurs, tous les termes de la série sont positifs;

c) il n'y a pas non plus de racines imaginaires complexes; en effet, soit une telle racine

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i.$$

Comme les coefficients de tous les termes sont réels,

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i$$

serait aussi une racine et en substituant $\lambda_1 r$ et $\lambda_2 r$ dans J, on aurait des résultats de la forme

$$J_1 = U + Vi$$
$$J_2 = U - Vi$$

de sorte que $r = 1$ sera racine de J_1 et de J_2.

D'autre part, nous avons obtenu (n° **106**) l'équation suivante (éq. 18) où a, λ_1, λ_2 sont arbitraires,

$$\left[r\left(J_2 \frac{\partial J_1}{\partial r} - J_1 \frac{\partial J_2}{\partial r}\right)\right]_o^a + (\lambda_1^2 - \lambda_2^2)\int_o^a rJ_1J_2 dr = o.$$

Prenons $a = 1$, J_1 et J_2 sont nuls à cette limite; la première parenthèse est nulle aux deux limites.

En outre, de

$$\lambda_1^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$$
$$\lambda_2^2 = \alpha^2 - \beta^2 - 2\alpha\beta i,$$

on tire

$$\lambda_1^2 - \lambda_2^2 = 4\alpha\beta i\,;$$

on a aussi

$$J_1J_2 = U^2 + V^2.$$

Il resterait donc

$$4\alpha\beta i \int_o^1 r(U^2 + V^2)dr = o.$$

Cette intégrale ne peut être nulle, donc il n'y a pas de racines imaginaires conjuguées.

Les racines sont donc toutes réelles.

On arrive, de la même façon, aux mêmes conclusions pour les dérivées d'ordre quelconque de J.

d) Il n'y a pas de racines doubles ; en effet, s'il y en avait une, λ_1,

elle serait commune à J et à sa dérivée $\frac{\partial J}{\partial x}$; or on a (éq. 20, n° **107**)

$$\int_0^a 2r[J(\lambda_1 r)]^2 dr = \left[\frac{r^2}{\lambda_1^2}\left\{\left(\frac{\partial J}{\partial r}\right)^2 + \lambda_1^2 [J(\lambda_1 r)]^2\right\}\right]_0^a.$$

En faisant $r = a = 1$, J et $\frac{\partial J}{\partial r}$ s'annuleraient ; le second membre serait nul et on devrait avoir

$$\int_0^1 2r[J(\lambda_1 r)]^2 dr = 0$$

ce qui est impossible ; *il n'y a pas de racines doubles.* Il en est de même pour toutes les dérivées de J.

118. — Enfin il reste à montrer qu'il y a bien des racines : nous ferons la transformation suivante destinée à faire disparaître la dérivée $\frac{\partial J}{\partial x}$ du premier membre de l'équation différentielle :

$$u = J\sqrt{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x}\,\frac{\partial J}{\partial x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\,J$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sqrt{x}\,\frac{\partial^2 J}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\,\frac{\partial J}{\partial x} - \frac{J}{4\sqrt{x^3}}.$$

En substituant dans l'équation (1), multipliée par $\sqrt{x}$, on trouve

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) = 0.$$

Rappelons en passant que toutes les équations linéaires du second

ordre peuvent être débarrassées de la dérivée première de la fonction ; si l'on a

$$p_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial y}{\partial x} + p_2 y = o$$

p_0, p_1, p_2 étant des fonctions quelconques de x ; en posant

$$u = ye^{-\int \frac{p_1}{2p_0} dx}$$

l'équation se ramène à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{4p_0 p_2 - 2p_0 p_1' - p_1^2 + 2p_1 p_0'}{4p_0^2} u = o.$$

Si x représente le temps et y le déplacement, ce type d'équation peut s'appliquer à un grand nombre de problèmes physiques dans lesquels on étudie le mouvement de corps matériels ou électrisés pour lesquels la masse p_0, la résistance du milieu p_1 et la réaction élastique p_2 ne sont fonctions que du temps.

119. — Nous allons montrer en suivant la marche indiquée par M. Kneser, que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho u = o$$

dans laquelle ρ est toujours positif, a toutes ses intégrales oscillantes [1].

Considérons l'équation auxiliaire :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \sigma z = o, \tag{6}$$

[1] Kneser. — *Math. Ann.*, t. XLII, 1892. Voir aussi un ancien Mémoire de Sturm. — *Journ. Liouv.*, t. I, 1836.

z étant encore une fonction de x, et comparons u et z pour les mêmes valeurs de x. On a

$$z\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + (\rho - \sigma)uz = o$$

et en intégrant entre des limites quelconques α et β

$$(7) \qquad \left[z\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial z}{\partial x}\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta (\rho - \sigma)uz\,dx = o.$$

120. — Considérons le cas particulier où $\rho = \sigma$, c'est à dire où l'on prend deux intégrales différentes de la même équation (5). Supposons qu'il existe sur ox (fig. 16) deux points α et β qui soient deux racines consécutives d'une des intégrales u, l'équation (7) se réduit à

$$\left(z\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\beta - \left(z\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\alpha = o.$$

Si nous sommes sûrs que u n'est pas infini dans l'intervalle $\alpha\beta$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ a des signes différents en ces deux points, car u a passé nécessairement par un maximum ou un minimum entre les deux.

L'équation exprime que la quantité $z\frac{\partial u}{\partial x}$ a le même signe en α et β ; comme $\frac{\partial u}{\partial x}$ a changé de signe, z en a changé aussi et, à moins que z ne soit nul pour α et β, auquel cas cette fonction serait identique à u, z aura une racine entre α et β. On montrerait de même qu'il y a une racine de u entre deux racines de z.

Ainsi s'il y a une intégrale qui possède une succession de racines distinctes, toutes les autres auront aussi une suite de racines intercalées entre celles de la première intégrale.

121. — Considérons le cas où ρ et σ sont différents. Supposons

qu'on puisse trouver une fonction σ telle que, dans l'intervalle de deux racines consécutives de u, $(\rho - \sigma)$ ne soit jamais positif,

$$\rho - \sigma \leqslant o.$$

Nous aurons cette fois

$$(8) \qquad z_\beta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\beta - z_\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\alpha + \int_\alpha^\beta (\rho - \sigma) u z dx = o.$$

Supposons que dans cet intervalle $(\alpha\beta)$, où u garde toujours même signe, + par exemple, z ne s'annule pas non plus, soit par exemple toujours positif. On a alors

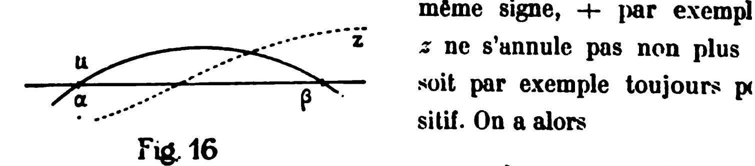


Fig. 16

$$z_\alpha > o, \qquad z_\beta > o;$$

d'autre part, on a

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\alpha > o, \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\beta < o.$$

La somme des deux premiers termes de l'équation (8) est donc négative ; comme tous les termes de l'intégrale sont aussi négatifs, l'équation (8) ne peut pas être satisfaite : il en résulte que z ne peut pas être positif dans tout l'intervalle $\alpha\beta$. Il ne peut pas être non plus négatif dans tout cet intervalle pour la même raison ; il doit par suite changer de signe entre α et β. Donc si l'on connaît une équation auxiliaire (6), telle qu'on ait $\rho - \sigma \leqslant o$ dans tout un intervalle compris entre deux racines consécutives de u, il y a une racine de z au moins entre les deux racines de u.

Inversement, si on a une équation auxiliaire telle qu'on ait $(\rho - \sigma) \geqslant o$ dans tout un intervalle entre deux racines de z, il y a une racine de u au moins entre les deux racines de z.

122. — En particulier, si on connaît pour ρ une limite finie et po

sitive n^2 à laquelle ρ reste toujours supérieur quand x croît constamment, on pourra prendre $\sigma = n^2$ et considérer l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + n^2 z = 0$$

dont l'intégrale est

$$z = A \cos nx + B \sin nx.$$

Entre deux racines consécutives de z, il y aura, d'après ce qui précède, au moins une racine de u.

Si, à partir d'une valeur suffisamment grande de x, ρ est toujours plus petit que $(n + \varepsilon)^2$, ε étant positif, considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (n + \varepsilon)^2 w = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$w = C \cos (n + \varepsilon)x + D \sin (n + \varepsilon)x$$

entre deux racines de u, il y a toujours une racine au moins de w.

Choisissons les constantes A, B, C, D, de manière que $x = \xi$ soit racine à la fois de z et de w et qu'il n'y ait pas de racine de u dans l'intervalle très petit entre $\xi + \frac{\pi}{n + \varepsilon}$ et $\xi + \frac{\pi}{n}$, il ne peut pas y avoir plus d'une racine de u entre ξ et $\xi + \frac{\pi}{n + \varepsilon}$, et il y en a toujours au moins une entre ξ et $\xi + \frac{\pi}{n}$.

Il résulte de là que, pour des valeurs suffisamment grandes de x, il y a une racine et une seule dans chaque intervalle $\frac{\pi}{n}$.

123. — Pour l'équation de Bessel, la limite est $n = 1$. Pour de très grandes valeurs de x, les racines finissent par se succéder avec un écart π l'une de l'autre, et on peut prendre l'expression approchée

$$J = \frac{A \cos x + B \sin x}{\sqrt{x}}. \tag{9}$$

Comment faut-il déterminer A et B pour que les grandes racines coïncident avec celles de l'intégrale particulière J_0 qui se réduit à l'unité pour $x = 0$? Cette question est très pénible à traiter et nous en donnerons seulement le résultat :

Pour que la valeur limite soit celle qui correspond à la valeur 1 à l'origine, il faut prendre

$$A = B = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

de sorte que la valeur limite de l'expression de J_0 dont nous avons le développement en série est

$$J_0 = \frac{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2\pi x}}.$$

Le calcul numérique montre que, dès la première racine, c'est-à-dire pour $x = 2$ environ, cette expression représente J_0 à moins de $\frac{1}{100}$.

Dès le premier maximum, la valeur de xJ_0^2 relative à ce maximum est égale, au centième près, à la valeur constante que prend ce produit pour les maximum éloignés.

Remarquons enfin que cette intégrale J_0 n'est pas celle qui convient pour l'extérieur d'un cylindre, car le produit xJ, qui représente le flux de force à travers une circonférence de rayon proportionnel à x, devient infini en même temps que x et le flux de force croîtrait indéfiniment avec la distance à l'axe.

CHAPITRE VI

CÂBLES. — ÉTAT VARIABLE

124. — Le problème général de la propagation des variations de potentiel électrique dans les conducteurs est très difficilement abordable ; mais il se simplifie lorsque le conducteur principal est un fil très long, entouré de très près par un autre conducteur au potentiel zéro, qui sépare le fil de tout autre système électrisé ; l'ensemble du fil et de son enveloppe conductrice, uniforme sur des longueurs de plusieurs milliers de fois leurs dimensions transversales, est alors soumis seulement à des influences locales, et n'est exposé à aucune action directe des parties lointaines du circuit. Cet ensemble, fil et son enveloppe conductrice séparés par un isolant solide, qui porte le nom de « *câble* » se comporte comme ayant une *capacité électrostatique* déterminée ; c'est ce qu'a admis lord Kelvin dans ses études théoriques sur les câbles, dès 1855, au début même de cette industrie, études qui ont eu une si capitale importance pour le développement de la télégraphie transatlantique.

Nous commencerons par justifier cette vue au moyen de considérations empruntées à M. Vaschy (1888), qui montrent que l'approximation obtenue est certainement meilleure encore que ne l'indique une vue rapide du problème.

125. — Considérons donc un état dans lequel $\frac{\partial V}{\partial x}$ peut être considéré comme uniforme sur une longueur considérable x du fil.

Dans le tube isolant, les équations du problème sont

$$V = -Ax$$

sur la surface du fil conducteur, de rayon R_1 ; sur la surface extérieure de l'isolant, de rayon R_2, qui est la surface intérieure de l'armature

$$V = o;$$

et entre les deux cylindres concentriques

$$\Delta V = o.$$

On satisfait aux deux dernières conditions en prenant

$$V = -Bx \log \frac{r}{R_2},$$

et à la première en déterminant B par l'équation

$$-Ax = Bx \log \frac{R_1}{R_2},$$

ce qui donne

$$V = -Ax \frac{\log \frac{r}{R_2}}{\log \frac{R_1}{R_2}}.$$

126. Forme des surfaces de niveau. — Pour $x = o$, V est nul quel que soit r ; la surface de niveau va normalement du câble à l'armature extérieure.

Les autres surfaces sont données par

$$x \log \frac{r}{R_2} = C^{te};$$

elles ont comme méridiennes les courbes indiquées sur la figure 17 ; qui toutes se rapprochent de l'armature extérieure à laquelle elles sont asymptotes.

Cherchons sous quel angle elles coupent le fil conducteur : on a à la surface du fil conducteur

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -A$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{Ax}{\log \frac{R_1}{R_2}} \frac{1}{R_1}$$

l'angle α que fait la tangente à la courbe avec la direction de l'axe est donné par

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dr}{dx} = \frac{\frac{\partial V}{dx}}{\frac{\partial V}{\partial r}} = \frac{R_1 \log \frac{R_1}{R_2}}{x}.$$

Cette tangente est infinie pour $x = o$ et décroit avec une extrême

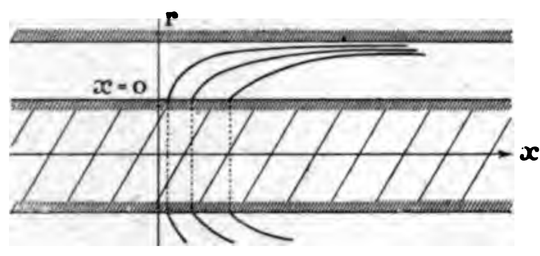


Fig. 17

rapidité : car le facteur $\frac{R_1}{x}$ devient très vite excessivement petit : par exemple, avec R_2 égal à 3 fois R_1, ce qui donne $\log \frac{R_1}{R_2} = 1,09$ la tangente est de même ordre de grandeur que $\frac{R_1}{x}$; pour un fil d'un millimètre de diamètre, l'angle α n'est déjà plus que d'une ou deux minutes à un mètre de distance de l'origine

$$\frac{R_1}{x} = \frac{1}{200}.$$

Les surfaces de niveau partent donc tangentiellement au conducteur à une fraction de degré près. Ce sont sensiblement des cylindres

parallèles à la fois à l'enveloppe et au câble comme dans le cas d'un cylindre en équilibre électrique au milieu du cylindre qui l'entoure.

127. Capacité.— Dans ces conditions on peut s'attendre à ce qu'il devienne légitime d'introduire la notion de *capacité par unité de longueur*, qui était absurde pour un fil placé dans un isolant de grande étendue. En effet la densité à la surface est

$$4\pi\Omega^2\mu = -\frac{\partial V}{\partial r}$$

en supposant le pouvoir inducteur spécifique de l'isolant égal à 1. On peut écrire

$$4\pi\Omega^2\mu = \frac{Ax}{R_1 \log \frac{R_1}{R_2}}.$$

La quantité d'électricité par unité de longueur au point d'abcisse x est

$$2\pi R_1\mu = \frac{Ax}{2\Omega^2 \log \frac{R_1}{R_2}} = \frac{-V}{2\Omega^2 \log \frac{R_1}{R_2}}.$$

Il y a une relation de proportionnalité entre la charge et le potentiel, ce qui permet de définir une capacité par la relation

$$C = \frac{1}{2\Omega^2 \log \frac{R_2}{R_1}} = \frac{C_0}{\Omega^2}.$$

C'est précisément celle que l'on trouve en électrostatique.

Un point à remarquer c'est que cette valeur est applicable tout le long du cable, y compris le point où le potentiel est égal à celui de l'enveloppe et où la surface du niveau est une section droite.

128. — Donc, dès que le potentiel est devenu linéaire sur des longueurs très grandes par rapport au diamètre, $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$ petit par rapport à $\frac{1}{R_1}\frac{\partial V}{\partial x}$, nous pouvons introduire la capacité électrostatique

et nous en servir dans tous nos raisonnements; les tout premiers instants sont ainsi seuls exclus. En généralisant le résultat du raisonnement de M. Vaschy, nous prendrons pour capacité, celle du problème d'équilibre correspondant même quand le fil sera excentré.

L'ensemble des équations du champ extérieur au fil se résume dès lors dans l'équation de charge superficielle :

$$-\frac{\partial i}{\partial s} = C\frac{\partial V}{\partial t},$$

s'il n'y a pas de fuites ; en éliminant i entre cette équation et l'équation tirée de la loi d'Ohm

$$\frac{\partial i}{\partial s} = -k\pi R^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2},$$

l'équation de propagation de l'électricité dans le câble est :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \left(\frac{k\pi R^2}{C}\right)\frac{\partial^2 V}{\partial^2 s}.$$

129. Fuites. — La notion de fuites, si confuse dans le problème général, quand il s'agit d'échanges mal définis entre le conducteur et l'isolant qui l'entoure, fait place, pour les câbles, à une notion beaucoup plus simple, celle de courants dérivés allant, à travers l'isolant imparfait, du fil conducteur à l'enveloppe qui lui fait face. Dans l'état permanent, et même dans l'état variable, si l'isolant *n'absorbe* pas l'électricité, la densité électrique dans l'isolant, même parcouru par le courant dérivé est nulle, et le problème de la distribution du potentiel reste le même que précédemment ; la notion de capacité subsiste, et de plus, d'après les considérations générales du n° 86 le courant du fil à l'enveloppe est égale à $k'C_0V$, en appelant toujours C_0 la capacité géométrique par unité de longueur du fil dans son enveloppe et k' la conductibilité de l'isolant.

La perte d'intensité par unité de longueur dans le fil, $-\frac{\partial i}{\partial s}$, fournit maintenant à la variation de charge de la surface du fil, $C\frac{\partial V}{\partial t}$, et au courant dérivé à travers l'isolant $k'C_0V$, ce qui donne

$$-\frac{\partial i}{\partial s} = C\frac{\partial V}{\partial t} + k'C_0V,$$

ou, en employant les unités électromagnétiques de mesure, comme nous le ferons toujours par la suite

$$-\frac{\partial i}{\partial s} = \frac{K}{\Omega^2}C_0\frac{\partial V}{\partial t} + k'C_0V$$

Ω^2 est le carré de la vitesse de la lumière dans le vide ; K est le pouvoir inducteur spécifique de l'isolant par rapport au vide.

130. — L'équation du potentiel le long du fil devient alors, en éliminant i, entre cette équation et celle de la loi d'Ohm

$$k\pi R^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{K}{\Omega^2}C_0\frac{\partial V}{\partial t} + k'C_0V.$$

Les propriétés de l'isolant sont malheureusement encore plus compliquées que celles que nous traduisons en lui attribuant un pouvoir inducteur K et une conductibilité k' ; mais l'étude expérimentale de *l'absorption* électrique par l'isolant n'ayant encore révélé aucune loi susceptible d'expression mathématique, nous ne pouvons nullement en tenir compte dans la théorie.

L'équation :

$$(1) \qquad k\pi R^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{K}{\Omega^2}C_0\frac{\partial V}{\partial t} + k'C_0V$$

est la même équation différentielle qu'Ohm avait obtenue. Mais les coefficients d'Ohm avaient une signification toute différente de ceux-ci.

Ici $\frac{K}{\Omega^2}C_0$ est un coefficient de charge superficielle ; tandis que le

coefficient correspondant d'Ohm était un coefficient de charge par unité de volume, correspondant à une propriété hypothétique du métal au lieu d'une propriété géométrique, dans laquelle n'intervient que K, pouvoir inducteur spécifique du milieu extérieur.

131. — Pour tout phénomène défini par des équations différentielles linéaires, l'influence de l'état initial et celle d'une modification locale peuvent être étudiées séparément ; l'addition des deux solutions convenables, l'une avec modifications locales imposées en fonction du temps, l'autre avec un état initial simple, fournit la solution pour le cas général.

Nous pouvons donc distinguer deux cas types :

1° Etat initial donné en x ; loi du retour à l'équilibre.

2° Etat initial d'équilibre : modification locale donnée en fonction du temps ; loi de la propagation.

C'est ce second problème, qui dans le cas des câbles est le plus important.

Ecrivons l'équation sous la forme

(2) $$\chi \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \gamma \frac{\partial V}{\partial t} + \varphi V ;$$

χ, représente la conductibilité du câble $k\pi R^2$;

φ, celle de l'isolant $k'C_0$;

γ. est la capacité du câble $\frac{K}{\Omega^2} C_0$.

132. Solutions simples. — Etudions d'abord les solutions simples de la forme

$$V = Ae^{\alpha x + \beta t}$$

α et β satisfont à l'équation

$$\chi\alpha^2 = \gamma\beta + \varphi,$$

d'où

(3) $$\beta = \frac{\chi\alpha^2 - \varphi}{\gamma}.$$

La vitesse de propagation correspondant à cette solution est

$$\omega = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{\chi\alpha}{\gamma} - \frac{\varphi}{\gamma\alpha}.$$

1° Supposons α réel, β et ω le sont aussi et l'expression précédente montre que la vitesse ω est réelle ; elle croît avec la conductibilité du câble ; elle dépend de la valeur de α c'est-à-dire de la forme de la courbe exponentielle au temps o ; elle varie en sens inverse de la capacité γ.

2° Examinons le cas plus général où α et β sont des imaginaires quelconques ; soient

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2, \qquad \beta = \beta_1 + i\beta_2.$$

L'équation (3) devient

$$(4) \qquad \beta_1 + i\beta_2 = \frac{\chi(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) - \varphi}{\gamma} + \frac{2\chi}{\gamma}\alpha_1\alpha_2 i.$$

133. — *Cas particuliers* : La disparition de l'état troublé est progressive sans oscillation, si β_2 est nul, ce qui exige que l'une des deux quantités α_2 ou α_1 soit nulle aussi ; cela arrive si l'état initial développé dans le sens des x est purement exponentiel ($\alpha_2 = o$) ou s'il est purement oscillatoire ($\alpha_1 = o$).

(a) $\alpha_1 = o$. Examinons d'abord ce dernier cas. Quelle que soit la période en longueur, la solution est donc toujours de la forme

$$(5) \qquad V = A e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t - \frac{\chi\alpha_2^2}{\gamma}t} \cos \alpha_2 x.$$

L'amortissement comprend deux termes :

Le premier $e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t}$ dépend du rapport des fuites à la capacité, et il est indépendant de la longueur d'onde.

Le deuxième terme $e^{-\frac{\chi\alpha_2^2}{\gamma}t}$ dépend de cette période par α_2 et du rapport de la conductibilité du fil à la capacité.

L'amplitude décroit sur place sans qu'il y ait de propagation.

b) $\alpha_2 = o$, $\alpha_1 < o$ Etat exponentiel, applicable à un câble limité du côté négatif :

$$V = Ae^{-\frac{\varphi}{\chi}t + \frac{\chi\alpha_1^2 t}{\gamma} + \alpha_1 x}.$$

Cet état n'est décroissant en fonction du temps que si l'on a

$$-\varphi + \chi\alpha_1^2 < o,$$

$$\alpha_1^2 < \frac{\varphi}{\chi},$$

la décroissance du potentiel en x ne doit pas être trop rapide, pour qu'il y ait décroissance dans le temps ; la limite de décroissance en x est d'autant plus voisine de l'uniformité que les fuites sont plus faibles. Pour

$$\alpha_1 = -\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}},$$

l'état est indépendant du temps.

134. — *c*) Supposons maintenant le phénomène purement périodique en fonction du temps (obtenu par exemple par un entretien en un point déterminé du fil).

Nous aurons

$$\alpha = o,$$

et par suite

$$\chi(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) = \varphi,$$

d'où

$$(6) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \sqrt{\frac{\varphi}{\chi} + \alpha_2^2}, \\ \beta_2 = 2\frac{\chi}{\gamma}\alpha_2\sqrt{\frac{\varphi}{\chi} + \alpha_2^2}. \end{cases}$$

La solution devient

$$V = Ae^{-x\sqrt{\frac{\varpi}{\chi}+\alpha_2^2}+i\left(\alpha_2 x - t\left\{\frac{2\chi}{\gamma}\alpha_2\sqrt{\frac{\varpi}{\chi}-\alpha_2^2}\right\}\right)}.$$

en choisissant le signe du radical de façon à avoir un phénomène s'amortissant du côté positif ; en prenant la partie réelle et en choisissant convenablement l'origine du temps :

$$(7)\qquad V = Ae^{-x\sqrt{\frac{\varpi}{\chi}+\alpha_2^2}}\cos\left\{\alpha_2\left[x - \frac{2\chi}{\gamma}t\sqrt{\frac{\varpi}{\chi}+\alpha_2^2}\right]\right\}.$$

A un instant donné l'amplitude est représentée en fonction de l'espace par une courbe périodique amortie dont les nœuds se transportent, quoique l'amplitude en chaque point ne dépende pas du temps. La vitesse de propagation des nœuds

$$\omega = \frac{2\chi}{\gamma}\sqrt{\frac{\varpi}{\chi}-\alpha_2^2},$$

dépend de tout ce qui caractérise le câble et l'oscillation. Elle croît

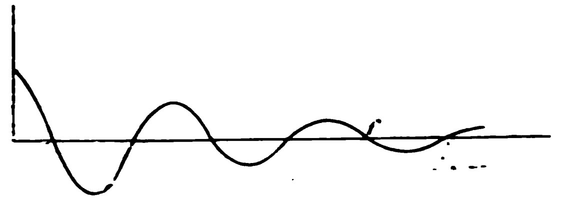


Fig. 18

avec la conductibilité du câble, décroît quand la capacité augmente ; croît quand α_2 augmente, donc quand la longueur d'onde diminue. Enfin elle croît avec ϖ, c'est-à-dire quand les fuites augmentent.

Remarquons que si l'on augmente indéfiniment la longueur d'onde ($\alpha_2 = 0$) la vitesse de propagation tend vers une valeur limite minimum, $\frac{2}{\gamma}\sqrt{\varpi\chi}$, différente de zéro quand il y a des fuites.

135. — *d*) Enfin, considérons le cas général où le mouvement en un point est périodique et amorti :

$$\beta_1 = \frac{\chi}{\gamma}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + \frac{\rho}{\gamma},$$

$$\beta_2 = \frac{2\alpha_1\alpha_2}{\gamma};$$

la solution sous la forme réelle est

(8) $$V = Ae^{-\alpha_1 x - \beta_1 t} \cos(\alpha_2 x + \beta_2 t).$$

Dans ce cas, il y a plusieurs vitesses de propagation à distinguer suivant la nature du phénomène observé.

1° Si nous observons les passages du potentiel par zéro, le cosinus nous donnera pour vitesse des nœuds

$$-\frac{\beta_2}{\alpha_2} \quad \text{ou} \quad -\frac{2\alpha_1}{\gamma}.$$

Cette vitesse de propagation est en raison inverse de la capacité et proportionnelle à α_1 c'est-à-dire à l'amortissement de la distribution en longueur ; elle est indépendante de la longueur d'onde.

2° L'amplitude $Ae^{-\alpha_1 x - \beta_1 t}$ se propage avec une vitesse différente de la précédente,

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1} = \frac{\chi}{\gamma}\left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\right) + \frac{\rho}{\gamma\alpha_1},$$

qui dépend de toutes les qualités du câble, de l'amortissement et de la longueur d'onde.

3° L'intensité du courant est

$$-\chi\frac{\partial V}{\partial x} = \chi A^{-\alpha_1 x - \beta_1 t}\left[\alpha_1 \cos(\alpha_2 x + \beta_2 t) + \alpha_2 \sin(\alpha_2 x + \beta_2 t)\right],$$

ses nœuds et son amplitude se propagent comme ceux du potentiel.

En résumé, il n'y a pas, dans les câbles, de vitesse de propagation déterminée indépendante des circonstances ; mais on peut créer des séries d'états qui se propagent avec une vitesse uniforme.

136. Formation d'une intégrale plus générale. — Revenons à la forme de solution simple donnée par l'équation (5) ; en effaçant

l'indice devenu inutile et laissant arbitraire l'origine nous pouvons la mettre sous la forme

$$(9) \qquad V = e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t}\, e^{-\frac{\chi\alpha^2}{\gamma}t}\,(A \cos \alpha x + B \sin \alpha x).$$

En ajoutant une infinité de solutions simples de cette forme nous aurons une série ou une intégrale de Fourier permettant de représenter un état initial arbitraire. Les solutions indiquées par Fourier, à propos de la chaleur, sont les plus intéressantes (¹).

Si nous avons un fil indéfini du côté des x positifs nous pourrons dans le calcul le considérer comme indéfini dans les deux sens, en prenant à gauche un état initial résultant de celui qu'on s'est donné à droite ; en particulier si l'état initial est représenté à droite par une fonction impaire il faudra prendre, pour $-x$, la même valeur initiale que pour $+x$, changée de signe.

137. — Un des premiers cas étudiés par Fourier est le suivant : à l'instant initial on établit un potentiel uniforme (température de Fourier) égal à 1, sur une portion de longueur égale à 1 à partir de l'origine ; partout ailleurs le potentiel est nul.

La fonction qui donne cet état initial est

$$(10) \qquad V = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha x \,\frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha.$$

La source qui entretient ce potentiel constant, étant subitement enlevée, il se produit une diffusion progressive représentée par

$$(11) \qquad V = \frac{2}{\pi}\, e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t} \int_0^\infty e^{-\frac{\chi\alpha^2}{\gamma}t} \cos \alpha x \,\frac{\sin \alpha}{\alpha}\, d\alpha,$$

On remarquera que, par suite de la présence de l'exponentielle, sous le signe $\int$, la discontinuité ne se conserve pas.

138. — On doit à Laplace (*Journ. Ec. Polyt. XV° Cahier*) une forme d'intégrale qui met en évidence l'état initial.

(¹) FOURIER — *Théorie de la chaleur*. Ch. IX nᵒˢ 347, 348.

Partons de l'intégrale connue

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2}\,dq = \sqrt{\pi}.$$

Cette intégrale étant prise de $-\infty$ à $+\infty$ nous pourrons remplacer q par $q+\tau$, τ étant une constante, sans changer la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(q+\tau)^2}dq = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2-2\tau q-\tau^2}dq$$

τ ne dépend pas de q, nous pouvons donc écrire :

(12) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2-2\tau q}\,dq = e^{\tau^2}\sqrt{\pi}.$$

D'autre part la forme générale de la solution simple est :

$$V = Ae^{\alpha n+\beta t},$$

avec

$$\beta = \frac{\chi\alpha^2-\varphi}{\gamma};$$

on peut écrire :

$$Ae^{\alpha x+\beta t} = Ae^{+\frac{\chi\alpha^2}{\gamma}t}\,e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t+\alpha x}.$$

Posons :

$$\frac{\chi\alpha^2}{\gamma}t = \tau^2;$$

d'après ce qui précède, on pourra écrire,

$$Ae^{\alpha x+\beta t} = \frac{A}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t+\alpha x}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2-2q\alpha\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}}\,dq$$

$$= \frac{A}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2-2q\alpha\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}+\alpha x}\,dq.$$

Ajoutons maintenant un nombre quelconque de solutions de ce genre, les A et les α étant différents, nous aurons :

$$(13)\quad V=\sum Ae^{\alpha x+\beta t}=\frac{e^{-\frac{\varphi t}{\gamma}}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2}\left[\sum Ae^{\alpha\left(x-2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right)}\right]dq$$

qui se réduit pour $t=o$ à

$$V=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2}\sum\left(Ae^{\alpha x}\right)dq=\left[\sum Ae^{\alpha x}\right].$$

139. — Sans nous inquiéter pour le moment des caractères généraux de cette fonction, nous sommes bien certains qu'elle est arbitraire dans une large mesure ; et nous pouvons y mettre en évidence l'état initial : en effet si à l'époque $t=o$ nous avons comme condition initiale :

$$(14)\qquad \sum Ae^{\alpha x}=F(x)$$

F étant une fonction connue de l'espace x, la fonction entre crochets sous le signe $\int$, est :

$$F\left(x-2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right).$$

Nous obtenons donc l'expression

$$(15)\qquad V=\frac{e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t}}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2}F\left(x-2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right)dq$$

où l'état initial est bien mis en évidence.

Remarquons qu'à l'intégrale (15) relative à un état variable quelconque nous pouvons ajouter une solution indépendante du temps représentant un état permanent.

140. — Le cas le plus intéressant pour l'étude de la propagation dans les câbles, est celui où, dans l'état initial, le potentiel est nul partout, sauf à l'origine, où nous le prenons égal à 1 et où il garde constamment cette valeur.

Pour $x = o$ nous devons à toute époque avoir $V = 1$.

Au bout d'un temps infini la solution correspondant à l'état permanent vers lequel on tend, est

$$V = e^{-|x|\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}};$$

nous prenons $|x|$ parce que nous admettons que le câble est symétrique par rapport à l'origine. L'état initial est représenté par la fonction

$$F(x) + e^{-|x|\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}}$$

ce qui nous conduit à prendre, dans l'intégrale

$$(16)\quad V = \frac{e^{-\frac{\varphi}{\gamma}t}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} F\left(x - 2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right) dq + e^{-x\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}}.$$

si x est positif $\qquad F_1(x) = -e^{-x\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}}$

si x est négatif $\qquad F_2(x) = -e^{-x\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}}.$

Sous le signe $\int$ il faudra remplacer $F\left(x - 2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right)$ par

$$F_1\left(x - 2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right) \quad \text{et par} \quad F_2\left(x - 2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right);$$

la variable étant q, le changement de la fonction F_1 à la fonction F_2 se produit pour

$$q = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}.$$

Il faudra donc écrire l'intégrale, en séparant les deux parties

$$\left\{\begin{aligned} &-\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}} e^{-q^2}\, e^{-\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}\left(x - 2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right)} dq \\ &+\int_{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}}^{+\infty} e^{-q^2}\, e^{+\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}\left(x - 2q\sqrt{\frac{\chi t}{\gamma}}\right)} dq. \end{aligned}\right.$$

141. — Mettons en évidence, dans ces intégrales, les termes

$$e^{-\left(q - \sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}}\right)^2} \quad \text{et} \quad e^{-\left(q + \sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}}\right)^2},$$

elles s'écrivent :

$$\text{la première} \qquad -\int e^{\frac{\varphi t}{\gamma} - \sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}\,x}\, e^{-\left(q - \sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}}\right)^2} dq$$

$$\text{la seconde} \qquad +\int e^{\frac{\varphi t}{\gamma} + \sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}\,x}\, e^{-\left(q + \sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}}\right)^2} dq.$$

Prenons comme variables respectivement

$$\xi = q - \sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}} \qquad \text{dans la première,}$$

$$\xi = q + \sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}} \qquad \text{dans la seconde,}$$

et faisons sortir du signe d'intégration les facteurs indépendants de

ces quantités; nous aurons finalement

$$\left|\begin{array}{l} -e^{\frac{\varphi t}{\gamma}-\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}x}\displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}-\sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}}} e^{-\xi^2}\,d\xi \\ +e^{\frac{\varphi t}{\gamma}+\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}x}\displaystyle\int_{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}+\sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}}}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi. \end{array}\right.$$

Portons dans l'équation (16) cette valeur de l'intégrale qui y figure; il vient

$$V=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left[e^{-\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}x}\int_{-\infty}^{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}-\sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}}} e^{-\xi^2}\,d\xi-e^{\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}x}\int_{\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}+\sqrt{\frac{\varphi t}{\gamma}}}^{+\infty} e^{-\xi^2}\,d\xi\right]+e^{-\sqrt{\frac{\varphi}{\chi}}x}.$$

142. — Cette solution satisfait bien aux conditions générales :

1° Pour $t = \infty$ et x fini, les deux intégrales sont nulles et on a bien la distribution qui correspond à l'état permanent du câble.

2° Pour $t = o$ et $x \gtrless o$, la seconde intégrale est nulle; la première égale à $\sqrt{\pi}$; il en résulte que V est nul.

3° Enfin pour $x = o$ et à une époque quelconque, les deux intégrales sont égales et se détruisent, et il reste seulement le dernier terme, égal à l'unité.

143. Discussion. — L'équation précédente est difficile à discuter, et comme dans la pratique on cherche à diminuer les fuites le plus possible, c'est le cas où elles sont nulles qui a fait l'objet principal des recherches de Lord Kelvin ; faisons donc

$$\varphi = o.$$

Posons

$$(18) \qquad \mathcal{E}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi} e^{-\xi^2} d\xi.$$

Cette fonction $\mathcal{E}$ est bien connue ; on en a dressé des tables numériques (voir *Tables de Houël*). L'équation (17) devient alors

$$(19) \qquad V = 1 - 2\mathcal{E}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}\right).$$

Dans le cas où il n'y a pas de fuite, le potentiel ne dépend que de la variable

$$\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}};$$

il est facile de voir sur l'équation différentielle même, par de simples considérations d'homogénéité, que lorsque

$$h = 0,$$

c'est bien là la variable essentielle du problème. La capacité et la conductibilité n'interviennent donc que par leur rapport.

144. — Le temps au bout duquel le potentiel en un point x atteint une fraction déterminée du potentiel à l'origine varie comme le carré de cette distance x. Ce résultat extrêmement important, énoncé par Lord Kelvin au moment des grands projets de communication par câble avec l'Amérique, n'a pas été admis du premier coup ; les électriciens n'étaient familiers qu'avec l'idée simple d'une vitesse de propagation, c'est-à-dire d'une durée de propagation proportionnelle à la distance.

En particulier un ingénieur des télégraphes anglais, Whitehouse, publia en 1856 les résultats d'une série d'expériences qui infirmaient

la loi de Lord Kelvin ; il trouvait en effet pour le retard à l'arrivée les durées indiquées ci-dessous :

Longueur du câble	Retard à l'arrivée
83 milles	0s,08
166 = 2 × 83	0 ,14
249 = 3 × 83	0 ,36
498 = 6 × 83	0 ,79
535	0 ,74
1020	1 ,42

Les nombres obtenus sont irréguliers, cependant semblent plutôt correspondre à une loi linéaire.

Lord Kelvin répliqua en faisant remarquer que les conditions de l'expérience n'étaient pas celles que suppose la théorie : Whitehouse en effet maintenait le contact du câble avec la source pendant une durée limitée et notait non une fraction déterminée du potentiel initial mais l'apparition du signal qui manifestait le courant; dans ce cas la théorie est beaucoup moins simple.

145. Emission de durée limitée.— L'expression de V que nous avons donnée suppose que, le câble étant d'abord au potentiel *o*, on met un bout en communication avec une source dont le potentiel varie suivant une loi déterminée en fonction du temps; alors V est de la forme

$$V = f(t,x)$$

t étant compté à partir du moment où l'on établit le contact.

Si au lieu d'être établi à l'origine du temps, le contact est établi au temps τ, on a

$$V = f[t - \tau, x].$$

Etablissons d'abord le contact au temps *o* avec une source à potentiel constant, puis supprimons-le au temps τ et rétablissons la communication avec le sol; la solution est évidemment donnée pour les époques postérieures à τ, par

$$V = f(t, x) - f[t - \tau, x],$$

en prenant pour f le second membre de l'équation (17).

Si un potentiel très élevé V_0, est maintenu pendant un temps très court, on aura

$$V = (V_0\tau)\frac{\partial f}{\partial t};$$

nous pouvons prendre simplement $\frac{\partial f}{\partial t}$ pour représenter le potentiel à toute la distance.

146. — Les courbes correspondant à ces divers cas ont été publiées par Lord Kelvin, dans une correspondance avec Stokes, où l'on retrouve tout le détail de cette discussion.

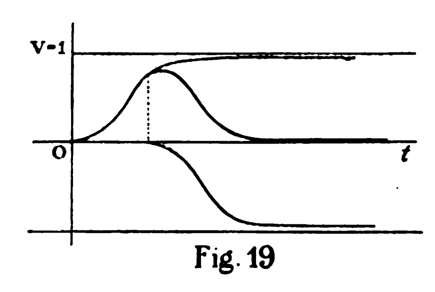


Fig. 19

Portons en abcisses les temps et en ordonnées les potentiels : si on supprime le contact après un certain temps τ, il faut à partir de cet instant retrancher des ordonnées de la courbe primitive, celles de la même courbe avancée de τ comme l'indique la figure 19.

Pour tracer les différentes courbes, Lord Kelvin a pris une unité de temps particulière a, arbitraire,

$$a = \frac{x^2}{\pi^2}\log\left(\frac{4}{3}\right)\frac{\gamma}{\chi}.$$

Il a tracé une série de courbes pour lesquelles le contact était supprimé au bout des temps.

$$a,\ 2a,\ 3a, \ldots\ 7a,$$

Fig. 20

cette unité a est telle que, pendant ce temps, le potentiel subisse un accroissement égal à $\frac{1}{1000}$ de sa valeur maximum. Au bout de $2a$ il aura atteint $\frac{1}{20}$; de $3a$, $\frac{2}{20}$; et enfin au bout de $7a$, $\frac{8}{10}$.

Il a tracé aussi la courbe correspondant à un contact très court avec une batterie puissante, telle que le produit ($V\tau$) du potentiel V de la source par la durée τ du contact est égal à 1.

La courbe (fig. 20) a le même aspect mais monte plus rapidement que dans les cas précédents.

147. — Si la longueur du câble varie, il faut, pour avoir la même courbe, que la durée du contact soit proportionnelle à (a) c'est-à-dire au carré de la longueur ; or, dans les expériences citées plus haut, Whitehouse parait avoir établi le contact pendant la même durée, quelle que fût la longueur ; dans ce cas on peut trouver, en se servant des courbes, le temps au bout duquel arrive le potentiel maximum d'après la théorie :

Longueur des câbles en milles marins	150	300	600	1 200	2 400
	1° *Durée de contact extrêmement courte mais avec une batterie puissante* :				
Epoques d'arrivée . . .	$0^s,0164$	$0^s,0656$	$0^s,2620$	$1^s,0490$	$4^s,1960$
	2° *Durée de contact : 1 seconde*				
Epoques d'arrivée. . . .	1^s	1^s	$1^s,104$	$1^s,70$	$4^s,53$
	3° *Durée du contact : 16 secondes*				
Epoques d'arrivée . . .	16^s	16^s	16^s	16^s	$17^s,49$

L'allure des nombres change complètement d'un cas à l'autre. L'arrivée du maximum retarde énormément à mesure que la durée du contact augmente.

L'arrivée d'une fraction déterminée du maximum se fait toujours au bout d'un temps fini qui atteint une valeur limite pour chaque câble. Le tableau suivant indique pour un câble la valeur de ce temps (fraction $\frac{3}{4}$ du maximum) pour une durée déterminée du con-

tact et pour les autres la valeur limite et la durée du contact pour laquelle on atteint cette valeur.

Durée du contact en secondes	Epoque d'arrivée des $\frac{3}{4}$ du maximum pour les câbles de			
	150 milles	300 milles	600 milles	2400 milles
0	0^s011			
1/3	$0^s,0378$			
2/3	»	$0^s,151$		
8	»	»	$0^s,604$	
Contact permanent	»	»	»	$9^s,664$

Ces tableaux montrent qu'il y a place pour toute une variété de lois apparentes du temps que met à arriver une fraction déterminée du maximum. Or, c'est une fraction du maximum, d'ailleurs assez mal déterminée, dépendant de la sensibilité des appareils récepteurs, que l'on observe lorsqu'on note le début de la déviation, il n'y a rien d'absurde à ce que, dans un cas particulier, Whitehouse ait pu trouver une proportionnalité grossière de ce temps à la longueur.

148. — Cette discussion montra péremptoirement que, pour conserver la même durée de propagation, il faut changer $\frac{\chi}{\gamma}$ dans le même rapport que x^2.

Or χ est proportionnel à la section du fil et γ dépend de $\log \frac{R_2}{R_1}$; si on laisse $\frac{R_2}{R_1}$ constant, γ est constant et χ varie comme le carré de R_1 ; donc il faut faire varier R_1 dans le même rapport que la longueur ; c'est ainsi que Lord Kelvin conseilla de fabriquer le premier câble transatlantique par rapport aux petits câbles déjà connus.

Cette proposition donna même lieu à une méprise assez amusante, et qui montre bien la difficulté qu'éprouvent souvent les praticiens et les théoriciens à se bien comprendre : au lieu de prendre un seul gros fil central, Lord Kelvin avait proposé de former ce conducteur au moyen d'un groupe de fils fins tressés ensemble, ce qui conserve au câble une flexibilité plus grande et diminue beaucoup les chances

de rupture intérieure. M. Whitehouse, ayant cru comprendre l'énoncé, mais n'ayant pas du tout compris la théorie, crut pouvoir contrôler la théorie de lord Kelvin en employant trois fils couverts séparément de gutta, et placés côte à côte ! Il obtint naturellement des résultats imprévus, dont lord Kelvin n'eut pas grand peine à indiquer l'origine.

149. — Les durées de propagation calculées par Lord Kelvin dans les tableaux précédents se rapportent à un câble hypothétique. Un des câbles les plus longs qui avaient été posés à cette époque (1856) était celui de Varna à Balaklava, d'une longueur de 400 milles. Mais il avait été employé, sitôt achevé, et on avait fait peu de mesures techniques ; or il était nécessaire de calculer pour ce câble les coefficients de l'équation ; les capacités étaient bien connues par des mesures électrostatiques (Lord Kelvin prenait 2 comme pouvoir inducteur spécifique de la gutta-percha) ; mais dans notre équation entre k, la conductibilité connue seulement en unités électromagnétiques. Le passage d'un système à l'autre était impossible à cette époque et Lord Kelvin indique à Stokes à ce propos, qu'il a l'intention de mesurer le rapport des unités (Ω^2) ; quelques mois après paraissent les expériences de Weber et Kohlrausch qui déterminent ce rapport et Lord Kelvin en tire aussitôt parti : dans le câble de la mer Noire la durée théorique de propagation du maximum pour un contact de durée très courte est $0^s,117$; il en déduit que pour un câble de 2400 milles cette durée serait de $4^s,2$ et il en conclut la rapidité de transmission des signaux à travers l'Atlantique, qu'il sera possible d'atteindre au moyen des appareils qu'il avait déjà imaginés, et qui sont encore aujourd'hui parmi les plus sûrs pour les transmissions lointaines.

150. Potentiel variable à l'origine. — $V_0 = f(t)$.

L'intégrale (19)

$$V = 1 - 2\mathcal{E}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{kt}}\right)$$

qui donne, à partir de l'état neutre, l'effet d'un contact prolongé

depuis $t = o$ avec une source au potentiel 1, permet de former facilement la solution du nouveau problème.

Une variation $\frac{\partial V_0}{\partial \tau} d\tau$ du potentiel à l'origine, produite à l'époque τ, ajoute à l'effet de la diffusion de l'état qui régnait à cette époque τ, une variation

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau} d\tau \left[1 - 2\mathcal{E}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi(t-\tau)}}\right) \right];$$

si l'état neutre régnait à l'époque o, nous aurons à l'époque t :

$$(20) \qquad V = \int_o^t \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau \left[1 - 2\mathcal{E}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi(t-\tau)}}\right) \right]$$

qui contient la variable t, à la fois sous le signe d'intégration et en limite de l'intégrale, tant que le potentiel à l'origine n'est pas devenu constant.

En un point quelconque, l'intensité du courant est :

$$(21) \quad i = -\chi \frac{\partial V}{\partial x} = + \int_o^t \frac{\partial f}{\partial \tau} \frac{\chi}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{\chi(t-\tau)}}\, e^{-\frac{x^2}{4}\frac{\gamma}{\chi(t-\tau)}}\, d\tau$$

en tenant compte de l'expression (18) de la fonction $\mathcal{E}$.

151. Débit donné à l'origine. — Si nous dérivons l'intégrale (19), par rapport à x, nous obtenons une nouvelle intégrale, l'équation différentielle étant linéaire :

$$(22) \qquad V = \frac{\partial}{\partial x}\left[1 - 2\mathcal{E}\left(\frac{x}{2}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}\right) \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\gamma}{\chi}}\, e^{-\frac{x^2\gamma}{4\chi t}}.$$

Le potentiel initial dans l'intégrale (19) était nul partout, sauf pour $x = o$; il en est de même pour l'intégrale obtenue en dérivant par

rapport à x. Quant au potentiel à l'origine, il passe brusquement, pour $t = o$, de zéro à l'infini, pour décroître ensuite suivant la loi

$$V_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}}.$$

L'intensité du courant

$$i = -\chi \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[1 - 2\, \mathcal{E}\left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}} \right) \right]$$

est égale, en vertu de l'équation différentielle à laquelle satisfait la parenthèse, à

(23) $$i = -\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - 2\, \mathcal{E}\left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}} \right) \right],$$

et la quantité totale qui a traversé la section x, de o à t, est

(24) $$\int_o^t i\,dt = -\gamma \left[1 - 2\, \mathcal{E}\left(\frac{x}{2} \sqrt{\frac{\gamma}{\chi t}} \right) \right].$$

A l'origine, en particulier, nous savons donc que la quantité totale émise passe brusquement de o à $-\gamma$ à l'origine du temps, et reste ensuite constante. La solution (22) nous donne donc l'effet de la transmission instantanée d'une quantité $-\gamma$ d'électricité, l'origine du fil $x = o$ restant ensuite isolée.

Une émission de courant suivant la loi

$$i = \psi(t)$$

donnera donc un potentiel

$$V = -\frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_o^t \psi(\tau) \sqrt{\frac{\gamma}{\chi(t-\tau)}}\, e^{-\frac{x^2 \gamma}{4\chi(t-\tau)}}\, d\tau.$$

Ainsi sont complètement résolus les cas plus importants au point

de vue pratique, ceux où l'on se donne la force électromotrice ou l'intensité du courant à l'origine.

Depuis les premiers mémoires de Lord Kelvin, l'étude des mêmes problèmes a été poursuivie par les ingénieurs des télégraphes, en tenant compte des fuites. On trouvera un résumé des résultats obtenus dans le 2e volume du Traité d'électricité de M. Vaschy.

152. — Une des questions que Lord Kelvin a examinées est celle de l'influence que peuvent avoir l'un sur l'autre plusieurs fils distincts placés à l'intérieur du même câble. Si l'on veut envoyer dans une ligne plusieurs dépêches à la fois, faudra-t-il prendre plusieurs câbles ou dans le même câble plusieurs fils isolés l'un de l'autre ? Ce dernier cas est de beaucoup préférable au point de vue économique, mais au début Lord Kelvin ne croyait pas qu'il fut possible d'assurer suffisamment l'indépendance des fils pour éviter des perturbations ; nous nous contenterons de poser la question et d'indiquer la forme des solutions.

Supposons que nous ayons deux fils seulement, de conductibilité χ_1 et χ_2 : l'un sur une très grande étendue est au potentiel V_1, l'autre au potentiel V_2. L'excès d'électricité qui entre sur celle qui sort est :

$$\text{pour le premier câble} \quad \chi_1 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2}$$

$$\text{pour le deuxième câble} \quad \chi_2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial x^2}.$$

C'est cette quantité d'électricité qui sert à les charger l'un par rapport à l'autre et à l'armature ; nous admettrons que la notion de capacité subsiste encore avec la même valeur qu'en électrostatique. Or, on sait que l'on a

$$M_1 = \gamma_1 V_1 + \gamma_{12}(V_1 - V_2)$$
$$M_2 = \gamma_2 V_2 + \gamma_{12}(V_2 - V_1).$$

Nous aurons par suite ici

$$(1)\quad \begin{cases} \chi_1 \dfrac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} = \gamma_1 \dfrac{\partial V_1}{\partial t} + \gamma_{12} \dfrac{\partial}{\partial t} (V_1 - V_2) \\ \chi_2 \dfrac{\partial^2 V_2}{\partial x^2} = \gamma_2 \dfrac{\partial V_2}{\partial t} + \gamma_{12} \dfrac{\partial}{\partial t} (V_2 - V_1) \end{cases}$$

Pour intégrer ce système d'équations aux dérivées partielles, multiplions les équations par des constantes a_1 et a_2 et ajoutons ; il vient

$$(2)\quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\chi_1 a_1 V_1 + \chi_2 a_2 V_2) = \frac{\partial}{\partial t} \Big[(\gamma_1 a_1 + \gamma_{12} a_1 - \gamma_{12} a_2) V_1 + (\gamma_2 a_2 + \gamma_{12} a_2 - \gamma_{12} a_1) V_2\Big].$$

On pourra, de deux façons différentes, déterminer a_1 et a_2 de façon à avoir la même fonction dans les deux membres : il suffit de poser

$$(3)\quad \frac{\chi_1 a_1}{\gamma_1 a_1 + \gamma_{12} a_1 - \gamma_{12} a_2} = \frac{\chi_2 a_2}{\gamma_2 a_2 + \gamma_{12} a_2 - \gamma_{12} a_1} = \psi$$

ce qui donnera une équation du second degré en χ ; aux deux racines correspondront des équations de la forme

$$\psi' \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = \frac{\partial u'}{\partial t}$$
$$\psi'' \frac{\partial^2 u''}{\partial x^2} = \frac{\partial u''}{\partial t}$$

équations semblables à celle que nous avons déjà intégrée et où u' et u'' sont des combinaisons linéaires de V_1 et V_2 ; nous n'aurons plus qu'à combiner les intégrales générales de u' et u'' pour trouver l'expression de V_1 et celle de V_2.

153. — Supposons, pour simplifier, les deux câbles identiques et semblablement placés ; alors

$$\chi_1 = \chi_2 = \chi \qquad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma.$$

En ajoutant et retranchant les équations (1) nous aurons :

$$(4)\quad \begin{cases} \chi \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(V_1 + V_2) = \gamma \dfrac{\partial}{\partial t}(V_1 + V_2) \\ \chi \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(V_1 - V_2) = \gamma \dfrac{\partial}{\partial t}(V_1 - V_2) + \gamma_{12} \dfrac{\partial}{\partial t}(V_1 - V_2). \end{cases}$$

Nous aurons des solutions de la forme

$$(5)\quad \begin{cases} V_1 + V_2 = \mathcal{F}\left(t, x, \dfrac{\chi}{\gamma}\right), \\ V_1 - V_2 = \mathcal{F}'\left(t, x, \dfrac{\chi}{\gamma + \gamma_{12}}\right). \end{cases}$$

154. — Supposons que le fil (2) étant toujours en communication avec le sol aux deux bouts, nous établissions le contact du fil y à l'origine avec une pile et que nous maintenions ce contact : il suffira dans les équations (5) de prendre la même fonction (19) pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$: en effet à l'origine,

$V_1 + V_2$ prend la valeur 1 pour $t = o$ et la conserve,
$V_1 - V_2$ prend la valeur 1 pour $t = o$ et la conserve.

Par suite V_1 prend à l'origine la valeur 1 et la conserve. V_2 garde toujours la valeur o. On a donc

$$V_1 = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{\chi}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{\chi}{\gamma + \gamma_{12}}\right),$$

$$V_2 = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{\chi}{\gamma}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\frac{\chi}{\gamma + \gamma_{12}}\right).$$

Pour que l'indépendance des deux fils soit suffisamment assurée il faut évidemment que $\gamma + \gamma_{12}$ diffère peu de γ ; c'est-à-dire que la capacité γ_{12} d'un fil par rapport à l'autre soit négligeable devant sa capacité γ par rapport à l'armature.

On voit, pour ainsi dire intuitivement, qu'il faut pour cela que l'angle sous lequel un fil est vu du centre de l'autre soit une petite fraction de l'angle 2π sous lequel on voit de ce point l'enveloppe elle-

même ; cette condition est facile à réaliser en éloignant suffisamment les fils l'un de l'autre.

155. — Dans toute cette théorie des câbles nous avons, avec Lord Kelvin, regardé le phénomène de charge du câble comme étant le phénomène capital ; c'est ce qu'avait clairement établi Faraday [1] par ses observations de 1854 dans la Tamise, quelques mois avant le début des recherches de Lord Kelvin, provoquées par une lettre de Stokes du 16 Octobre 1854. On pourrait se demander maintenant dans quelle mesure il est raisonnable de supposer que l'armature se maintient au potentiel zéro, tout en se chargeant à sa surface intérieure autant que le fil lui-même. La légitimité de cette hypothèse provient évidemment de ce que l'armature est en communication directe avec l'eau de mer qui l'entoure, qui par son étendue indéfinie oppose une résistance incomparablement moindre aux courants que le fil fin de cuivre. Dans un mémoire de 1877 [2], Kirchhoff a amorcé cette étude ; considérant le conducteur cylindrique, l'isolant annulaire et la mer indéfinie tout autour, Kirchhoff a formé les solutions simples de la forme

$$V = \left[AJ_0(imr) + BY_0(imr) \right] e^{imx + \theta t}$$

qui contiennent pour l'isolant annulaire les deux fonctions de Bessel J_0 et Y_0 qui est nulle à l'infini, mais seulement l'une d'elles, J_0 dans le cuivre, et Y_0 dans l'eau.

Les quatre coefficients A, B, et la valeur numérique de m qui correspond à une valeur donnée de θ, sont déterminées par les quatre équations de continuité aux deux surfaces de séparation :

[1] On electric Induction — Associated cases of current and static effects — *Proc. R. I.* 1854. (*Exp. Res.* III. 506.) — On subterraneous Electro-Telegraph Wires. — (*Ph. M.* 1854) (*Exp. Res.* 521). — Faraday renvoie à un article de W. Siemens. (*Ann. Ch.* XXIX p. 398) qui avait observé dès 1850 les mêmes faits que Latimer Clarck et Faraday en 1854.

Further observations on associated cases, in electric Induction, of Current and static effects. — (*Ph. M.* 1855) (*Exp. Res.* III. 575).

[2] Zur Theorie der Bewegung der Electricität in unterseeischen und unterirdischen Telegraphendrähten. — *Monatsber. Ak. Berlin et Abh.* I. p. 182.

continuité du potentiel, continuité du courant. L'équation en résultant de l'élimination des coefficients A, B, est naturelleme intraitable dans sa généralité ; Kirchhoff se borne à montrer q si θ est assez petit on retombe sur la solution connue. Il n'y aur naturellement rien à tirer de la combinaison des solutions simpl de Kirchhoff, dans le cas général, à moins d'un travail de discussic numérique considérable, et qui semble hors de proportion avec résultat à obtenir.

CHAPITRE VII

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE DES COURANTS

156. Courants permanents. — Les lois d'Ohm fournissent des renseignements complets sur la distribution des courants permanents à l'intérieur des conducteurs et sur la distribution des potentiels tant à l'intérieur qu'à la surface ; mais elles ne fournissent aucune indication sur le champ électrostatique qui les environne et, en l'absence d'exemples traités d'une manière complète, on en est réduit à quelques vues insuffisamment justifiées. Commençons donc par poser le problème électrostatique à résoudre.

Étant donnée, par les lois d'Ohm, la distribution permanente des potentiels à la surface des conducteurs parcourus par les courants, et les potentiels ou les charges des conducteurs isolés, trouver le champ électrique dans l'isolant homogène qui les entoure et, par conséquent, la distribution des densités superficielles sur tous les conducteurs.

157. — Le problème se partagera, comme en électrostatique, en plusieurs autres :

1° Le circuit est parcouru par le courant, tous les autres conducteurs sont au sol.

2° Le circuit est tout entier au potentiel zéro — (fiction mathématique irréalisable, à moins de séparer par des coupures infiniment minces chaque partie homogène de ses voisines et de la mettre en communication avec un conducteur isolé de même nature infiniment grand et infiniment éloigné) ; — les autres conducteurs sont aux

potentiels donnés, ou chargés de masses connues, excès des masses données sur les masses induites dans le premier problème.

Ce second problème est purement électrostatique.

Les densités superficielles tout le long du circuit s'obtiennent en ajoutant les densités réelles du premier problème aux densités induites sur un conducteur homogène de même forme que le circuit dans le second problème. Dans l'état permanent comme dans l'état d'équilibre, la composante *normale* interne de la force électrique est nulle à la surface libre, de sorte que la densité superficielle est entièrement définie par la composante normale de la force dans l'isolant.

158. — Le premier problème est immédiatement résoluble par l'emploi de la fonction de Green, lorsqu'on connaît celle qui convient à la forme et à la position des conducteurs en présence.

Le potentiel V est donné, constant ou variable, continu ou discontinu, à la surface des conducteurs isolés et du circuit. Il doit être fini et continu dans tout l'isolant, nul à l'infini, si le champ est illimité.

Lorsque la fonction de Green est connue sous forme finie, comme pour la sphère, le potentiel V qu'elle fournit se présente sous forme d'une intégrale définie. On peut donc donner sous cette forme, pour la sphère, le champ résultant d'un nombre quelconque de points ou de lignes doubles superficiels ou de feuillets internes, faisant fonction de pile à la surface ou dans la masse, — pourvu qu'on sache traiter le problème de distribution de courants correspondant.

Même dans ce cas où la fonction de Green est des plus simples, si l'on veut étudier l'ensemble du champ, l'emploi du développement en fonctions sphériques sera préférable.

Dans le seul cas qui corresponde vraiment à un circuit, celui du tore, la fonction de Green se présente sous forme d'un développement en série de fonctions spéciales à cette forme de corps, et fournit le moyen le plus rapide de former les coefficients de la série analogue pour le problème actuel.

Mais la discussion sans calculs numériques étendus reste généralement peu abordable et très incomplète.

159. — Contentons-nous donc de quelques indications.

Pour un fil cylindrique parcouru par un courant permanent et éloigné de tout autre conducteur, l'indétermination est complète ; on s'en rend compte facilement. Le courant et la résistance du fil par unité de longueur étant finis, le potentiel est infini positif à un bout, infini négatif à l'autre bout, et comme d'ailleurs il faut que le courant se ferme, le potentiel est indéterminé à grande distance. Il est donc absolument impossible de rien dire sur la forme des surfaces de niveau autour du fil. La supposition d'une distribution isotrope autour de l'axe, qui permet quelquefois d'achever la détermination de problèmes analogues, n'est ici d'aucun usage. A l'extérieur, les surfaces de niveau peuvent être des plans normaux à l'axe, (densité nulle) des surfaces aboutissant toutes sous le même angle (densité constante) ou sous des angles variables quelconques au conducteur, tout cela dépend de la manière dont le circuit se ferme au loin, et il est aussi raisonnable de parler de densités croissantes au rebours du potentiel que de l'inverse. On ne sort de cette indétermination que si le fil est entouré d'assez près par une enveloppe conductrice en communication avec le sol, qui lui donne une capacité déterminée par unité de longueur, lorsqu'elle se maintient à distance constante du fil, comme nous l'avons vu à propos des câbles.

160. — De même, au voisinage immédiat d'une surface de contact de deux métaux, la loi des potentiels électrostatiques que produirait la couche double seule, est très différentede la loi de variation linéaire qui est due au passage du courant, en sorte que la production de celle-ci exige la présence de densités superficielles compensatrices le long du fil ; on peut se faire une idée de leur importance de la manière suivante. Le champ de la couche double AA′ (fig. 21) seule est identique au champ d'un feuillet magnétique de même forme et de même puissance ; la distribution des forces est celle que les spectres magnétiques nous ont rendue si familière ; la ligne de force

partant d'un point de la surface positive contourne le bord A de la couche double et vient aboutir au même point sur la face négative.

Les surfaces de niveau, qui sont orthogonales aux lignes de force, viennent toutes se couper le long du contour AA′ de la couche double, puisque les potentiels de ces surfaces sont tous compris entre les potentiels extrêmes de la couche double.

Ainsi, près du contour de la couche double, où les surfaces de niveau sont infiniment voisines, la force due au champ de la couche double seule devient infinie. De quelque manière que parte la surface du conducteur, elle coupe normalement les lignes de force de la couche double.

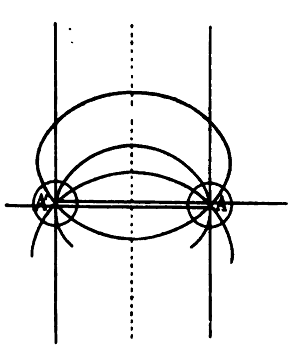


Fig. 21

Or, dans l'état permanent, la surface du conducteur est, non pas normale, mais tangente aux lignes de force intérieures. Pour compenser ces forces dues au champ de la couche double seule, forces dont la composante normale croît indéfiniment en approchant du contour A′, il est bien évident qu'il faut mettre sur la surface libre des fils une distribution de densités superficielles qui croisse elle aussi indéfiniment en approchant du contour ; cette distribution, compensatrice pour *l'intérieur* du conducteur, est évidemment *de même signe* que la partie de la couche à laquelle elle se rattache. Ainsi, soit dans l'état d'équilibre, soit dans l'état de courant permanent, il y a sur une zône d'ailleurs peu étendue à partir de la ligne de contact des deux métaux, une distribution de densités superficielles induites par la couche double, qui font suite aux deux nappes de celle-ci, et deviennent infinies comme elle le long de la ligne de contact.

CHAPITRE VIII

CHAMP ÉLECTROSTATIQUE PARTICULIER

161. — Il est intéressant de traiter rigoureusement quelques problèmes particuliers. Prenons d'abord pour circuit un cylindre circulaire d'épaisseur uniforme très petite et supposons la pile E localisée le long d'une génératrice.

Soit P sa projection sur une section droite; choisissons ce point pour origine des coordonnées.

Dans le cylindre, à l'état permanent, on a

(1) $$V_1 = \frac{Es}{2\pi R}$$

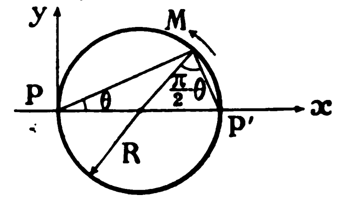


Fig. 22

s étant l'arc compté sur la section droite à partir du point P′ opposé à P (fig. 22).

Soit M le point qui correspond à la valeur s de l'arc et θ l'angle du rayon vecteur PM avec l'axe des x ; la condition (1) devient

(2) $$V_1 = E\frac{\theta}{\pi}.$$

162. — Occupons-nous maintenant de l'espace isolant intérieur. Le potentiel V_0 doit être continu dans tout l'intérieur ; satisfaire à l'équation de Laplace,

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} = 0$$

et prendre la valeur (2), le long de la circonférence.

La solution rendue évidente par le choix des coordonnées est

$$(3) \qquad V_0 = \frac{E\theta}{\pi} = \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{R+x}$$

Les surfaces équipotentielles sont donc les plans qui passent par la génératrice P. Au point M la densité superficielle μ est reliée à la force électrique normale f par la formule connue

$$\frac{4\pi\Omega^2}{K} \mu = f.$$

Calculons f : c'est la projection, sur le rayon, de la dérivée du potentiel suivant la normale, cette normale étant ici MP'. On a par suite

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{E}{\pi}\left(-\frac{1}{PM}\right) = -\frac{E}{2\pi R \cos\theta}$$

La force f est alors

$$f = \text{Proj.}\left(-\frac{\partial V}{\partial n}\right) = \frac{E}{8\pi^2 R} \operatorname{tg} \theta$$

on a par suite

$$\mu = \frac{E}{2\pi\Omega^2 R} \operatorname{tg} \theta.$$

La densité est nulle au point P' où nous avons supposé le potentiel nul ; elle croit jusqu'au voisinage de la pile, $\theta = \frac{\pi}{2}$, où elle devient infiniment grande.

163. — A l'extérieur du cylindre, le potentiel doit satisfaire à une condition de plus ; il doit être nul à l'infini. Pour avoir les surfaces de niveau rappelons-nous la propriété suivante :

Quand on a un système de surfaces de niveau, une transformation par rayons-vecteurs réciproques par rapport à un centre quelconque donne un autre système de surfaces de niveau.

Ici, faisons la transformation dans le plan de la section ; en prenant pour centre le centre du cercle et pour puissance le carré du rayon : de sorte que le cercle lui-même n'est pas modifié. Les cordes

intérieures seront transformés en la partie extérieure de leurs cercles correspondants. Les surfaces de niveau extérieures sont donc des portions de cylindres circulaires passant par P et O et coupant le circuit sous le même angle que les plans de niveau intérieurs qu'ils continuent.

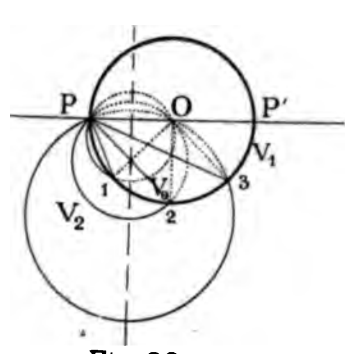


Fig. 23

Remarquons que la condition énoncée au début V nul à l'infini est bien satisfaite, puisque le plan de potentiel o qui est PP' passe par le centre.

L'expression de V_2 est

$$V_2 = \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{Ry}{Rx + x^2 + y^2}.$$

La distribution linéaire du potentiel le long du circuit n'a pas pour conséquence une distribution linéaire des densités ; au contraire elle entraine nécessairement l'existence de densités très grandes au voisinage de la pile, conformément aux indications générales du chapitre précédent. Dans ce cas très simple, malgré la symétrie parfaite d'un circuit circulaire, la capacité par unité d'arc s, n'a pas de sens dans l'état permanent.

La figure 23 est très différente de celle que contiennent tous les traités à propos du théorème de Poynting.

164. — Occupons-nous maintenant de l'état variable, et formons d'abord l'équation du circuit, avec l'angle au centre α comme variable.

R étant le rayon moyen ; l'intensité du courant est

$$i = -\frac{ke}{R}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha}.$$

Considérons le petit élément de longueur $Rd\alpha$; ce qui s'accumule dans cette portion du cylindre est l'excès de ce qui entre, sur ce qui sort :

$$\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{ke}{R}\frac{\partial V_1}{\partial \alpha}\right).$$

Cette quantité d'électricité sert à accroître la densité sur les deux faces : or sur la face intérieure la densité est, en supposant l'épaisseur e négligeable

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V_0}{\partial n}\right) = \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_0}{\partial r}\right)_{r=R}.$$

la normale n étant dirigée vers le centre.

A l'extérieur

$$-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial V_2}{\partial n}\right) = \left(-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)_{r=R}.$$

Nous aurons donc

$$\frac{\partial}{R\partial\alpha}\left(\frac{ke}{4R}\frac{\partial V_1}{\partial\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_0}{\partial r} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial V_2}{\partial r}\right\}_{r=R}$$

en désignant par V_0 et V_2 les potentiels intérieur et extérieur.

165. — La condition à laquelle le potentiel du champ intérieur, et celui du champ extérieur doivent satisfaire à la surface du circuit étant la même

$$V_0 = V_1 = V_2 \qquad (r = R),$$

V_2 s'obtient par inversion de V_0 comme dans l'état permanent, et l'on a

$$\left(\frac{\partial V_2}{\partial r}\right)_{r=R} = -\left(\frac{\partial V_0}{\partial r}\right)_{r=R}$$

Les équations sont donc finalement pour l'intérieur

(4) $$\frac{\partial^2 V_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_0}{\partial y^2} = 0$$

et à la surface $r = R$

$$V_0 = V_1$$

(5) $$\frac{ke}{R^2}\frac{\partial^2 V_1}{\partial\alpha^2} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2 V_0}{\partial t\,\partial r}$$

166. — Rappelons maintenant une transformation connue ; on considère deux fonctions α et β de x et y qui fournissent un système de coordonnées orthogonales et isothermes : c'est à dire telles que l'on ait

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0$$

et qu'en outre α et β soient orthogonales.

Alors si on prend α et β comme variables au lieu de x et y, l'équation (4) devient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} = 0.$$

Dans le cas actuel il est facile de voir que l'angle au centre α et la quantité $\beta = \log r$ forment précisément un système orthogonal et isotherme : on a donc dans tout l'isolant

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 (\log r)} = 0.$$

Mettons aussi en évidence dans (5) la dérivée par rapport à $\log r$; nous aurons

$$(7) \qquad \frac{ke}{R^2} \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial V_0}{\partial \log r} \right)_{r = R}$$

on peut écrire encore cette équation

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial \alpha^2} - \frac{R}{2\pi ke} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial V_0}{\partial \log r} \right) = 0.$$

Prenons pour V_0 une expression de la forme

$$(9) \qquad V_0 = f\left(\alpha, \log r - 2\pi \frac{ke}{R} t\right).$$

C'est une fonction de α et de $\log r$; t y intervient aussi, mais il

n'intervient pas dans l'équation (5) de sorte que si la fonction $f(\alpha, \log r)$ satisfait à 6, il en est de même de la fonction (9).

Nous aurons

$$\frac{\partial V}{\partial \log r} = \frac{\partial f}{\partial \beta_1}$$

en posant

$$\beta_1 = \log r - 2\pi \frac{ke}{R} t$$

et ensuite

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial V}{\partial \log r} = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_1^2} \frac{\partial \beta_1}{\partial t} = - \frac{2\pi ke}{R} \frac{\partial^2 f}{\partial \beta_1^2}.$$

En portant cette valeur dans l'équation (8) on obtient l'équation (6); tout se réduit donc à satisfaire à cette dernière équation : il suffira de prendre une solution déjà connue et de remplacer $\log r$ par

$$\log r - \frac{2\pi ke}{R} t.$$

167. — Or nous connaissons la solution

$$V = \frac{E}{\pi} \theta = \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x + R}$$

nous avons

$$y = e^{\beta} \sin \alpha$$

$$x = e^{\beta} \cos \alpha$$

et par suite

$$V_0 = \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{\beta} \sin \alpha}{e^{\beta} \cos \alpha + R}.$$

Faisons la substitution indiquée et nous avons pour le potentiel à l'intérieur dans l'état variable

$$V_0 = \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{e^{\left(\beta - \frac{2\pi ke}{R} t\right)} \sin \alpha}{e^{\left(\beta - \frac{2\pi ke}{R} t\right)} \cos \alpha + R}$$

ou

(10) $$V_0 = \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x + Re^{\frac{2\pi ke}{R} t}}.$$

168. — Reste à satisfaire aux conditions initiales ; c'est ce que nous obtenons en combinant cette solution avec celle de l'état permanent (3) :

(11) $$V_0 = \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x + R} - \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x + Re^{\frac{2\pi ke}{R} t}}.$$

Pour $t = \infty$ nous avons bien le régime permanent, car le second terme devient nul.

Pour $t = o$ le potentiel est nul partout, sauf au point P ; en ce point on a, quel que soit t, $\frac{E}{2}$ d'un côté du point P sur le cylindre ; $-\frac{E}{2}$ de l'autre côté, au total E.

La solution (11) représente donc bien l'état variable à l'intérieur.

A l'extérieur, l'inversion donne

$$V_2 = \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{Ry}{Rx + x^2 + y^2} - \frac{E}{\pi} \operatorname{arc\,tg} \frac{Ry}{Rx + (x^2 + y^2)e^{\frac{2\pi ke}{R} t}}.$$

169. — Pour l'intérieur, la partie variable a même forme que celle de l'état permanent pour un cylindre de même centre, dont le rayon $Re^{-\frac{2\pi ke}{R} t}$ croîtrait depuis R à l'origine du temps, jusqu'à une valeur infinie, suivant une loi exponentielle.

Pour l'extérieur, cette même partie variable est identique à la solution permanente pour un cylindre de même centre, dont le rayon $Re^{\frac{2\pi ke}{R} t}$ décroîtrait exponentiellement de R à o.

Dans l'un et l'autre cas, le point de discontinuité sur le cercle de

diamètre variable, sort dès l'origine du temps, du domaine auquel se rapporte la solution.

Les caractères généraux de la solution se conservent dans toutes celles qu'on en peut déduire pour des cylindres minces compris entre deux courbes isothermes voisines, α et $\alpha + d\alpha$ [1].

[1] M. BRILLOUIN. — Champ électrostatique permanent et variable d'une bobine parcourue par un courant électrique. — *Ann. Ch. Ph.*, 1902.

LIVRE III

INDUCTION

CHAPITRE PREMIER

EXPÉRIENCES FONDAMENTALES
INDUCTION DANS LES CIRCUITS FERMÉS IMMOBILES

170. Mémoires expérimentaux. — Faraday a découvert en 1831 les lois qualitatives de l'induction ; il a varié les circonstances de production des courants induits, mais n'a fait qu'un petit nombre de mesures d'ailleurs assez confuses : il ne parait avoir eu qu'une connaissance grossière des lois d'Ohm, car, dans un mémoire de 1851, pour déterminer l'influence des dimensions du fil sur le courant induit, il le produit dans des fils de même masse, mais de divers diamètres, et naturellement il n'aboutit à rien de net [1].

La découverte de Faraday fut suivie en 1833 d'une série d'expériences fondamentales de Lenz (Mémoire lu à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg le 29 novembre : publié dans les Annales de Poggendorf en 1834). Lenz établit la loi célèbre qui porte son nom sur la relation entre le sens des courants induits et le sens des

[1] Voir M. Brillouin. Comparaison des coefficients d'induction. I, Notes finales. — *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 1882.

actions mécaniques correspondantes. Il fit la même année sur l'induction électromagnétique une série d'expériences capitales publiées en 1835.

171. Expériences de Lenz. — Le courant induit est produit dans une bobine enroulée sur un cylindre de fer doux et dont la résistance est celle qui donne le maximum de sensibilité au galvanomètre employé : on approche ou on éloigne le cylindre de fer doux d'un aimant permanent ; les limites du déplacement sont, une position lointaine quelconque, et le contact, car le champ croît très vite lorsque l'armature est très près des pôles de sorte que sa position n'est bien définie qu'au contact. Lenz constata que les arrachements successifs produisaient des effets identiques, sauf les premiers, comme on pouvait s'y attendre, car on sait qu'ils diminuent la force portante. Il s'assura d'abord que les différents tours de fil jouaient le même rôle ; les impulsions données au galvanomètre à travers le même nombre de tours de fils sont

près du pôle nord	5,55
au milieu	5,60
près du pôle sud	5,55

Il y a donc un maximum, très peu marqué, au milieu ; c'est là que Lenz place sa bobine.

1° *Influence du nombre de tours du fil.* — Prenant une longeur de 50 pieds d'un fil de $0,^{mm}044$ de diamètre attaché aux deux bornes du galvanomètre, Lenz en enroula progressivement sur l'armature, 2, 4,... 20 tours ; les impulsions varièrent de 5° 39′ à 68° : en tenant compte de la loi d'action sur l'aiguille du galvanomètre en fonction de l'angle, l'écart entre le calcul et l'observation n'atteignit pas en moyenne $\frac{1}{2}$ degré et ne dépassa pas 1° pour 20 tours. L'hypothèse faite dans le calcul est donc exacte : *il y a proportionnalité entre la force électromotrice produite et le nombre de tours de fil.*

2° *Influence du diamètre du fil.* — 4 spires de dix tours chacune, faites avec quatre fils de diamètres différents et de même longueur,

furent enroulées au milieu de l'aimant. Les rapports des forces électromotrices produites dans chacune des trois premières spires à la force électromotrice produite dans la quatrième, furent respectivement

1,003, 1,009, 1,01.

Donc à moins de $\frac{1}{100}$ (limite de la précision dans ces expériences), *la force électromotrice induite est indépendante du diamètre du fil.*

3° *Influence de la nature du fil.* — Les opinions à ce sujet étaient très diverses. Nobili et Antinori, avec des fils de cuivre, fer, antimoine, bismuth, avaient trouvé que l'intensité du courant décroissait d'un fil à l'autre dans l'ordre ci-dessus. Lenz remarque que cet ordre est le même que celui des conductibilités décroissantes et, par suite, que malgré ces résultats, la force électromotrice est peut-être constante. Il constitue un circuit formé par deux spires de métaux différents, enroulées sur un petit tube de carton, de façon à pouvoir les enfiler séparément sur l'armature; la résistance du circuit était constante et on pouvait comparer l'induction dans l'un des métaux à l'induction dans l'autre métal. Il obtint pour le rapport des déviations :

Du cuivre au fer	1,0033
» platine	0,99912
» laiton	0,9989

La valeur de la déviation pour le cuivre est de 17° environ; elle est la même à 1′ près pour les autres métaux : *la force électromotrice est donc indépendante de la nature du métal.*

En résumé, c'est à Lenz qu'on doit cette notion fondamentale : L'INDUCTION PRODUIT UNE FORCE ÉLECTROMOTRICE.

172. Mémoires théoriques. — Un certain nombre de lois générales sur l'influence du nombre des spires, du sens de l'enroulement, etc., pouvaient être regardées comme évidentes dès le début.

Mais la loi élémentaire de l'induction produite par le déplacement relatif des circuits et des aimants paraît avoir été découverte par F. Neumann en 1845, comme conséquence de la loi de Lenz (Mémoires présentés en 1845 et 1847 à l'Académie des Sciences de Berlin). L'induction par variation d'intensité, sans déplacement des circuits, n'est obtenue qu'à l'aide d'une hypothèse auxiliaire.

A la même époque (1846) parurent les premiers travaux théoriques de Weber, qui obtint à la fois la loi de l'action d'un courant sur un courant et les lois de l'induction, en partant de cette idée préconçue que le courant est dû au transport, en sens opposé, de petites masses électriques positives et négatives, dont l'action mutuelle dépend du mouvement. Choisissant cette loi de façon à satisfaire aux lois d'Ampère, sans expliquer d'ailleurs comment l'action électrodynamique subie par les particules électriques se transmet à la matière du conducteur, Weber trouva aussi les lois de l'induction due au mouvement des circuits ; par la nature même de son hypothèse, les lois de l'induction due au mouvement varié des masses électriques, c'est à dire aux variations des courants, s'y trouvèrent aussi contenues.

Le mode d'exposition le plus connu est celui d'Helmholtz (¹) et de W. Thomson (²), qui ont déduit ces lois du principe général de la conservation de l'énergie et des hypothèses suivantes : la résistance d'un fil est entièrement définie par sa nature ; la quantité de chaleur dégagée par le courant est égale à RI^2, quelle que soit l'origine du courant.

173. Circuits immobiles. — Ne devant nous occuper dans ces leçons que des circuits immobiles, nous laisserons entièrement de côté l'induction par le mouvement, et nous étudierons directement les lois de l'induction d'un circuit fermé sur un autre, sans déplacement relatif, en nous appuyant sur les expériences de Felici.

(¹) Über die Erhaltung der Kraft. — Berlin, 1847.
(²) On the theory of electro-magnetic induction. — *B. A. R.* 1848. — On the mechanical theory of electrolysis. — *Ph. M.* 1851.

Les expériences que l'on peut faire en induction sont moins complètes que celles qui établissent les lois d'action mécanique de deux circuits parce qu'on ne peut pas isoler l'action sur un élément de circuit, comme Ampère a réussi à le faire pour la force mécanique. Rappelons qu'entre deux circuits parallèles voisins, l'établissement du courant dans l'un d'eux induit un courant de sens contraire dans l'autre.

174. Expériences de Felici (1852, *Ann. de Physique et Chimie*, t. XXXIV). — Felici emploie une bonne méthode de zéro. Il prend un cylindre de bois de diamètre uniforme, sur lequel sont enroulés trois circuits distincts. Dans deux de ces circuits passe le courant inducteur ; le troisième, placé entre les deux autres à 10 centimètres de chacun d'eux, aboutit à un galvanomètre d'impulsion très sensible. Le diamètre du cylindre est de 25 centimètres. On règle la distance des deux circuits 1 et 3 et le sens du courant inducteur, de façon que leurs effets sur le circuit 2 se compensent ; on note les positions des circuits.

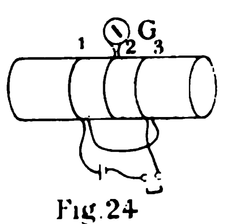


Fig. 24

I. — L'expérience étant faite d'abord avec une seule spire, on forme ensuite l'un des circuits inducteurs d'un faisceau de n fils fins réunis à leurs deux extrémités, mais bien isolés sur toute leur longueur et enroulés de façon à former une cordelette ; l'intensité totale i dans ce circuit est la même que dans l'autre circuit qui n'a pas changé. Dans ces conditions, la compensation subsiste : donc n spires où l'intensité passe de o à $\frac{i}{n}$ ont le même effet qu'une spire où l'intensité passe de o à i.

Felici en conclut que *l'effet d'une spire est proportionnel à l'intensité du courant qui la traverse* ; cela suppose que l'effet d'une spire est indépendant de la présence des spires voisines.

II. — *La force électromotrice induite est indépendante des métaux dont sont formés les circuits tant induit qu'inducteur* : même méthode de zéro en changeant la nature du fil du circuit 1. La

compensation subsiste encore quand on intervertit le rôle des circuits induit et inducteur

III. — *La force électromotrice induite est indépendante de la section du fil* : la compensation subsiste, en effet, quelle que soit la grosseur du circuit 3, pourvu qu'il ait le même nombre de spires.

175. IV. — Felici prenait ensuite deux cylindres A et B portant chacun deux circuits A_1 A_2, B_1 B_2. A_1 et B_1 sont associés et forment le circuit inducteur ; A_2 et B_2 forment de même le circuit induit. On règle la distance des circuits de façon que, chacun ne comportant qu'une spire, il y ait compensation complète ; puis on met m spires en A_1 et n en A_2 ; m' en B_1 et n' en B_2 et on cherche quelle condition il faut réaliser pour que la compensation subsiste : on trouve qu'elle est

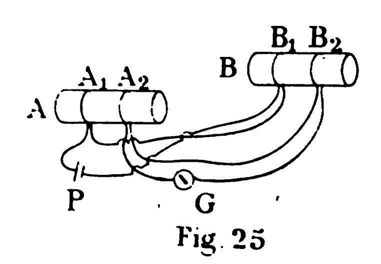


Fig. 25

$$mn = m'n'.$$

Donc toutes les spires exercent bien l'une sur l'autre le même effet.

V. *Principe des courants sinueux.* — On remplace une quelconque des spires A_1 A_2 par une spire sinueuse, mais gardant la même position moyenne, l'équilibre subsiste.

VI. *Loi d'action en fonction de la distance.* — Supposons l'un des cylindres non plus égal à l'autre, mais k fois plus gros. Felici dispose les circuits de telle façon que les rapports des diamètres aux distances des deux spires sur chaque cylindre aient la même valeur. Les deux systèmes sont semblables et le rapport de similitude est k. Si le nombre de spires est le même dans les deux cylindres, la compensation n'a plus lieu : il faut, pour l'obtenir, prendre k fois plus grand le produit mn des nombres de spires du petit cylindre

$$mn = km'n'.$$

Ainsi *la force électromotrice induite dans des systèmes semblables est proportionnelle à leur dimension linéaire.*

176. — Félici a encore fait d'autres expériences pour comparer l'effet de la variation de l'intensité du courant inducteur à celui du déplacement. Il a démontré le principe admis par Faraday que l'effet est le même quand l'intensité varie de *o* à *i*, ou quand on transporte le circuit à intensité constante *i* de sa position actuelle à une position dans laquelle la variation d'intensité ne produit plus d'effet. Il se servait de trois roues de bois montées sur le même axe et portant une rainure suivant un diamètre. Un fil est enroulé sur chaque roue comme l'indique la figure. Quand les rainures sont parallèles, il y a induction par variation d'intensité quand elles sont perpendiculaires, par raison de symétrie, il n'y en a pas.

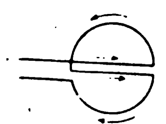


Fig 26

Deux de ces roues fixes constituent le circuit inducteur ; la troisième formant le circuit induit est mobile ; fermons le courant inducteur quand la rainure de cette roue est perpendiculaire aux deux autres : le galvanomètre reste au repos ; tournons rapidement de 90° la roue disposée de façon à supprimer elle-même le courant inducteur à la fin de sa course : nous obtenons dans le galvanomètre la superposition de deux effets dus l'un au mouvement relatif des circuits, l'autre à la suppression du courant ; l'effet trouvé est nul [1].

C'est ce principe, admis à titre d'hypothèse, qui avait permis à Neumann de rattacher les courants induits par variation d'intensité à ceux induits par variation de la position du circuit.

177. — Il y a encore un point important à éclaircir : toutes les fois que l'on fait une expérience au galvanomètre, on constate que le courant induit par fermeture du circuit est égal au courant induit par ou-

[1] Le montage de Félici était plus compliqué et moins probant.

verture. Les deux forces électromotrices totales $\left(\int E dt\right)$ sont égales : cette idée a paru d'abord en contradiction avec cette particularité qu'on obtient facilement une étincelle dans l'induit à la rupture du circuit inducteur ; tandis qu'il n'y en a pas à la fermeture. Si l'on remarque que le rapprochement était déjà fait entre la production de l'étincelle et la force électromotrice, on comprend que l'identité des forces électromotrices totales n'ait pas paru évidente dès le début : dans l'étincelle, ce n'est pas la force électromotrice totale qui intervient, mais la force électromotrice maximum ; il suffit pour que ces valeurs maximum soient inégales que l'un des phénomènes soit plus rapide que l'autre : on est maître de la durée de la rupture beaucoup mieux que de celle de la fermeture.

178. — C'est surtout dans les expériences d'induction d'un circuit sur lui-même qu'il était difficile de mettre en évidence cette égalité des forces électromotrices à la fermeture ou à la rupture du circuit.

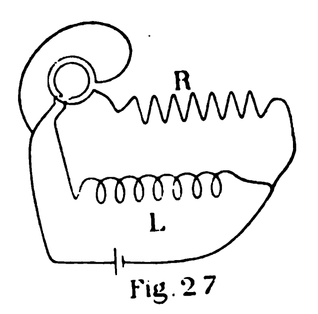


Fig. 27

Edlund (1849, Pogg. Ann. 77) a montré l'identité des quantités d'électricité mises en jeu dans ces deux cas. Un des circuits d'un galvanomètre différentiel contient une résistance inductive L, l'autre une résistance non inductive R. Les deux circuits en parallèle sont reliés aux deux pôles d'une pile ; on règle la résistance R de façon que le galvanomètre soit au zéro quand le courant passe ; donc au moment de la fermeture du circuit il y aura dans le galvanomètre, par le fait de l'extra-courant produit dans L, une impulsion qui mesurera la quantité d'électricité. On aura de même, à l'ouverture du courant, une autre impulsion qui doit être égale à la première : c'est ce qu'a vérifié Edlund.

179. — Enfin il reste à signaler une série d'expériences purement qualitatives, mais fort importantes, indiquées par Matteucci au début

de son livre sur l'induction (¹) : elles sont relatives à l'influence des milieux intermédiaires. Quand, dans la méthode de zéro de Félici, le système étant compensé, on introduit, entre les spires 2 et 3, une matière isolante à la place de l'air, la compensation subsiste. Si on interpose une masse métallique, elle subsiste encore.

Fig 28

De même, prenant deux couples de spires et plaçant l'un d'eux dans un champ magnétique très intense mais constant, la force électromotrice totale mise en jeu n'est pas changée.



(¹) MATTEUCCI, prof. à Pise. — *Cours spécial sur l'induction, le magnétisme de rotation et le diamagnétisme.* Mallet-Bachelier, 1854.

CHAPITRE II

INDUCTION DANS LES CIRCUITS FERMÉS IMMOBILES THÉORIE

180. — Nous pouvons nous représenter les phénomènes d'induction entre deux circuits immobiles comme provenant de l'action de chaque élément ds du premier sur chaque élément ds' du second. Soit $E' ds\, ds'$ la force électromotrice que produit, sur ds', la variation d'intensité du courant de o à i dans ds, ces deux éléments étant considérés comme faisant partie de circuits fermés. La force électromotrice totale produite dans le second circuit est

$$\mathbf{E} = \int \int E' ds\, ds'.$$

Or d'après la loi des courants sinueux nous pouvons remplacer chaque élément par ses projections sur les trois axes ; la force électromotrice élémentaire est de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{A}_1\, dx\, dx' + \mathrm{A}_2\, dx\, dy' + \mathrm{A}_3\, dx\, dz' \\ & + \mathrm{B}_1\, dy\, dx' + \mathrm{B}_2\, dy\, dy' + \mathrm{B}_3\, dy\, dz' \\ & + \mathrm{C}_1\, dz\, dx' + \mathrm{C}_2\, dz\, dy' + \mathrm{C}_3\, dz\, dz'. \end{aligned} \right.$$

Prenons pour axe des x la droite qui joint les deux éléments ; pour plan des xz celui qui contient ds ; ce choix des axes fait disparaître tous les termes en dy.

D'autre part, il est évident que la force électromotrice induite dans

ds' par ds, ne change pas quand la position relative des éléments ne change pas, le milieu intermédiaire étant supposé isotrope. Faisons tourner les deux éléments de 180° autour de Ox; dz, dz' et dy' ont changé de signe, et, comme la force électromotrice ne doit pas changer, les coefficients, A_2, A_3 et C_1 doivent être nuls.

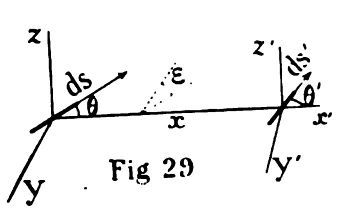


Fig 29

Enfin le plan xz est un plan de symétrie pour les effets produits par toute variation dans ds, donc rien ne doit changer quand dy' change de signe ; donc C_2 doit être nul. Il nous reste

$$E'ds\,ds' = A_1 dx\,dx' + C_3 dz\,dz',$$

qu'on peut écrire encore

$$E'ds\,ds' = A dx\,dx' + C(dx\,dx' + dz\,dz').$$

181. — Soit θ l'angle de ds avec le sens positif de Ox, θ' l'angle correspondant de ds' : on a

$$dx = ds \cos\theta, \qquad dx' = ds' \cos\theta' ;$$

d'autre part, soit ε l'angle des deux directions des éléments ; on a

$$\frac{dx\,dx' + dz\,dz'}{ds\,ds'} = \cos\varepsilon.$$

Par suite notre expression devient

$$(2) \qquad E'ds\,ds' = [A \cos\theta \cos\theta' + C \cos\varepsilon]\, ds\,ds'.$$

Nous avons exprimé tout ce qui dépend de l'orientation des éléments ; A et C ne peuvent plus être que des fonctions de la distance r.

Exprimons les angles en fonction de r et de ses dérivées en s et en s' : nous avons

$$dr = ds' \cos\theta' - ds \cos\theta$$

d'où

$$\cos\theta' = \frac{\partial r}{\partial s'}, \qquad \cos\theta = -\frac{\partial r}{\partial s}.$$

Cherchons la projection de ds' sur la direction de ds ; nous pouvons projeter ds' directement, ce qui donne

$$ds' \cos\varepsilon.$$

D'autre part la projection de r est

$$r\cos\theta = -r\frac{\partial r}{\partial s}.$$

En passant d'une extrémité de ds' à l'autre, cette projection augmenté de la quantité

$$\frac{\partial}{\partial s'}\left(-r\frac{\partial r}{\partial s}\right)ds'.$$

qui est encore la projection de ds' sur ds : on a donc

$$\cos\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial s'}\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right).$$

182. — Considérons le produit d'une fonction $\mathfrak{R}$ de r par $\cos\varepsilon$;

$$\mathfrak{R}\cos\varepsilon = -\mathfrak{R}\frac{\partial}{\partial s'}\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial s'}\left(\mathfrak{R}r\frac{\partial r}{\partial s}\right) + r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial s'}$$

or

$$r\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial s'} = r\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} = -r\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r}\cos\theta\cos\theta'$$

nous avons donc

$$\mathfrak{R}\cos\varepsilon = -\frac{\partial}{\partial s'}\left(\mathfrak{R}r\frac{\partial r}{\partial s}\right) - r\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r}\cos\theta\cos\theta'.$$

Intégrons par rapport à ds' le long d'un arc AB du circuit induit. Nous aurons un premier terme

$$\int_A^B \frac{\partial}{\partial s'}\left(\mathfrak{R} r \frac{\partial r}{\partial s}\right) ds' = \left|\mathfrak{R} r \frac{\partial r}{\partial s}\right|_A^B$$

Si nous fermons le circuit, la quantité $\mathfrak{R} r \frac{\partial r}{\partial s}$ reprend la même valeur et par suite cette intégrale est nulle.

Donc quand un des circuits est fermé, on peut remplacer

$$\mathfrak{R} \cos \varepsilon \quad \text{par} \quad - r \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} \cos \theta \cos \theta'$$

sans changer l'intégrale.

183. — Il en résulte que dans l'expression (3), les expériences faites avec des circuits fermés ne peuvent pas faire connaître séparément les deux termes en $\cos \theta \cos \theta'$ et en $\cos \varepsilon$. Nous n'avons donc qu'une seule fonction de la distance à déterminer.

C'est l'expérience des deux systèmes semblables qui la détermine.

Nous avions dans le premier système une force électromotrice

$$E_1 = \int\int f(r) \cos \varepsilon \, ds \, ds,$$

dans le deuxième, si k est le rapport de similitude,

$$E_2 = \int\int f(kr) \cos \varepsilon \, k ds \, k ds';$$

or l'expérience a montré que l'on a

$$E_2 = k E_1. \qquad (3)$$

184. — Ce résultat a été obtenu pour une forme particulière de circuits fermés; mais on peut varier cette forme suffisamment pour qu'on puisse admettre la généralité de la relation (3); il en résulte que

$$\int\int f(kx)\cos\varepsilon\, k^2\, ds\, ds' = k\int\int f(r)\cos\varepsilon\, ds\, ds'$$

ou

$$kf(kr) = f(r)$$

ou encore

$$krf(kr) = rf(r).$$

Ce produit est donc constant, et l'on a

$$f(r) = \frac{a}{r}$$

$$E' = \frac{a}{r}\cos\varepsilon.$$

Mais on peut prendre aussi

$$E' = \frac{a}{r}\cos\theta\cos\theta',$$

car, pour passer d'une forme à l'autre, nous devons prendre

$$\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial r} = -\frac{a}{r^2}$$

d'où

$$-r\frac{\partial\mathfrak{R}}{\partial r} = \frac{a}{r}.$$

Nous pouvons enfin associer les deux formes.

Nous pourrons donc prendre indifféremment, lorsqu'un des circuits est fermé, une quelconque des trois expressions.

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{a}{r}\cos\varepsilon \\ \dfrac{a}{r}\cos\theta\cos\theta' \\ \dfrac{a(1-\alpha)}{r}\cos\theta\cos\theta' + \dfrac{a\alpha}{r}\cos\varepsilon. \end{cases}$$

L'expression la plus commode et que l'on prend généralement est la première, qui donne pour la force électromotrice totale dans le second circuit

$$\mathrm{E} = a \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} ds\, ds'.$$

185. — L'emploi du principe des courants sinueux pour former la loi élémentaire nous a naturellement conduits à une forme symétrique en ds et ds'. La force électromotrice induite dans un circuit fermé C', par une variation d'intensité i dans un circuit fermé C, doit donc être égale à la force électromotrice induite dans C par une variation d'intensité i dans C'. Cette réciprocité est entièrement conforme à l'expérience.

Comment la constante a dépend-elle de l'intensité i? L'expérience montre avec toute la précision désirable qu'elle lui est proportionnelle et qu'elle est négative (n° 173, 174). Dans le système électromagnétique de mesures électriques, on prend le coefficient égal à — 1, quand les deux circuits sont dans le vide, pratiquement dans l'air ou dans un milieu non magnétique quelconque, et l'on écrit

$$\mathrm{E} = - \mathrm{M}i = - i \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} ds\, ds'$$

pour la force électromotrice totale induite dans le sens positif du circuit C' au moment de l'établissement du courant i dans le sens positif du circuit C.

186. — Cette force électromotrice totale E est bien représentée en admettant que pendant la variation du courant, la force électromotrice est

$$\mathrm{E} = - \mathrm{M} \frac{\partial i}{\partial t}. \tag{5}$$

C'est ce que nous admettrons dans toute la suite; mais il importe de remarquer que les expériences de variation d'intensité soit en une

seule fois, soit par étapes, se font en passant d'un état permanent à un autre; dans chacun de ces états $\frac{\partial i}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$, etc. sont nuls, et si pendant l'état variable il y avait des forces électromotrices proportionnelles à ces diverses dérivées, les expériences décrites jusqu'ici ne nous en avertiraient pas.

Aucune des expériences, actuellement nombreuses, depuis les premières exécutées par Helmholtz, sur le détail de l'état variable des courants induits n'a indiqué jusqu'à présent la nécessité de pareils termes.

187. — La quantité

$$(6) \qquad M = \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r}\, ds\, ds'$$

porte le nom de *coefficient d'induction mutuelle* des deux circuits; elle a les dimensions d'une longueur.

Rappelons, sans y insister, que l'expérience de comparaison citée plus haut (176) entre les courants induits par déplacement et ceux induits par variation d'intensité, conduit à prendre $-\frac{\partial}{\partial t}(Mi)$ pour force électromotrice quand les deux variations sont simultanées.

188. — Dans toute cette étude des circuits filiformes, nous avons traité l'intensité du courant comme localisée sur une ligne géométrique, axe du fil cylindrique réel. Ce n'est une approximation acceptable que si les distances r de deux éléments quelconques sont toujours très grandes par rapport aux dimensions transversales des fils réels.

Lorsqu'il n'en est pas ainsi, il faut évidemment tenir compte de ces dimensions et le problème devient singulièrement plus compliqué. En particulier, lorsqu'il s'agit de l'induction d'un circuit sur lui-même, que l'observation montre finie, l'expression de M devient évidemment infinie, puisqu'il y a une infinité de termes qui ont $r = o$ en dénominateur.

Mais, r entrant à la première puissance en dénominateur, on peut présumer qu'il suffira que la section droite du conducteur soit étendue dans un seul sens, et sans épaisseur, pour que l'expression limite de M reste finie. C'est en effet ce qui arrive, et tout le monde connait le calcul élémentaire de la self-induction L d'une bobine longue. Précisément à cause de cet exemple connu, il n'est pas inutile de montrer la difficulté sur deux cas très simples de circuits filiformes.

189. — Considérons un circuit circulaire de rayon a.

On a

$$\theta' = \theta$$
$$ds' = 2a\,d\theta$$
$$r = 2a \sin \theta.$$

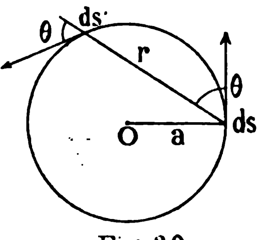


Fig. 30

La force électromotrice induite par tout le cercle sur un de ses éléments ds est

$$\int \frac{\cos\theta \cos\theta'\, ds'}{r} = \int_0^\pi \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\, d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{d\theta}{\sin\theta} - \sin\theta\, d\theta\right).$$

Au premier terme correspond

$$\left[\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}\right]_0^\pi.$$

Cette quantité est infinie ; le second terme donne une quantité finie.

190. — Examinons maintenant un élément et un fil indéfini parallèles, on a $\theta' = \theta$ et

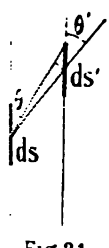


Fig 31

$$ds' = \frac{r\, d\theta'}{\sin\theta'}$$

ce qui donne encore l'expression infinie

$$\int_0^\pi \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{\sin\theta}.$$

191. Circuits étendus en volume. — Abordons l'étude des circuits fermés étendus en volume.

La force électromotrice induite par une variation $\frac{\partial i}{\partial t}$ est :

$$E = -\frac{\partial i}{\partial t}\int\int\frac{\cos\varepsilon\, ds\, ds'}{r}$$

expression qui s'écrit en coordonnées rectangulaires, où $dx\, dy\, dz$, $dx'\, dy'\, dz'$ sont respectivement les projections de ds et ds'

$$E = -\frac{\partial i}{\partial t}\int\int\frac{dx\, dx' + dy\, dy' + dz\, dz'}{r}$$

ou :

$$E = -\int\int\frac{\partial i}{\partial t}\frac{dx\, dx'}{r} - \int\int\frac{\partial i}{\partial t}\frac{dy\, dy'}{r} - \int\int\frac{\partial i}{\partial t}\frac{dz\, dz'}{r}$$

ou encore :

$$E = -\int dx'\int\frac{\partial i}{\partial t}\frac{dx}{r} - \int dy'\int\frac{\partial i}{\partial t}\frac{dy}{r} - \int dz'\int\frac{\partial i}{\partial t}\frac{dz}{r}.$$

192. — On n'a pas besoin ici de n'associer que des éléments où $\frac{\partial i}{\partial t}$ garde la même valeur. Si plusieurs circuits agissent sur le même élément ds' on pourra associer leurs éléments dans un ordre quelconque, pourvu qu'ils forment des circuits fermés. Posons :

$$(7) \quad F_1 = \int i\frac{dx}{r}, \qquad F_2 = \int i\frac{dy}{r}, \qquad F_3 = \int i\frac{dz}{r},$$

nous aurons :

$$(8) \quad E = -\int\frac{\partial F_1}{\partial t}dx' - \int\frac{\partial F_2}{\partial t}dy' - \int\frac{\partial F_3}{\partial t}dz'$$

puisque nous ne considérons que des circuits immobiles.

Il résulte de la forme particulière que nous avons choisie pour la force électromotrice élémentaire que la force électromotrice induite dans ds' peut être considérée comme la projection, sur la direction de l'élément ds', d'une force électromotrice ayant une direction déterminée en chaque point de l'espace et dont les projections sur les trois axes sont :

$$-\frac{\partial F_1}{\partial t}, \; -\frac{\partial F_2}{\partial t}, \; -\frac{\partial F_3}{\partial t};$$

193. — L'intensité du courant dans un élément du circuit inducteur d'orientation quelconque étant i, soient j_1, j_2, j_3, les composantes de la densité du courant dans cet élément, dont la section est σ ; on a :

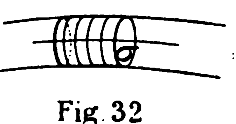


Fig. 32

$$i\,dx = j_1\,\sigma\,ds$$

et, comme $\sigma\,ds$ est l'élément de volume du conducteur,

$$i\,dx = j_1\,dx\,dy\,dz.$$

Au lieu de faire l'intégration en suivant un filet du conducteur tout le long du circuit, nous pouvons la faire par élément de volume, ce qui donne :

$$(9) \qquad \int \frac{i\,dx}{r} = \int\int\int j_1 \frac{dx\,dy\,dz}{r}$$

l'intégrale triple devant être étendue à tous les éléments du conducteur : mais, comme en dehors du conducteur nous pouvons considérer les trois quantités $j_1 j_2 j_3$ comme nulles (du moins au point où nous sommes parvenu dans notre étude), nous pourrons dire que l'intégrale doit être étendue à l'espace entier, conducteur ou non.

La forme même de cette intégrale nous montre que les F sont liés aux j par les équations aux dérivées partielles :

$$(10) \qquad \begin{cases} \Delta F_1 = -4\pi j_1 \\ \Delta F_2 = -4\pi j_2 \\ \Delta F_3 = -4\pi j_3 \end{cases}$$

Les F et leurs dérivées premières sont continues dans tout l'es-

pace, à moins qu il n'y ait des nappes de densité de courant superficielle finie, (discontinuité de la dérivée normale) ou des nappes de couches doubles de courants de sens inverse (discontinuité de ... comme on le sait par les résultats connus en électrostatique).

La grandeur dont F_1, F_2, F_3, sont les projections porte le nom de *potentiel vecteur*.

Sous la forme (5) le caractère des courants, d'être fermés, était écrit dans la formule même. Mais avec la forme (8), (10), qui ne met plus ce caractère en évidence, il est utile de l'écrire explicitement :

$$(11) \qquad \frac{\partial j_1}{\partial x} + \frac{\partial j_2}{\partial y} + \frac{\partial j_3}{\partial z} = 0, \qquad \Big[j_n\Big]_A^B = 0;$$

Les formules relatives aux courants ouverts pourront être plus générales que (8) et (10).

194. *Remarque*. — L'imperfection du langage ne rend pas tout à fait inutile d'insister sur les relations entre les diverses forces électromotrices mises en œuvre.

La seule force électromotrice véritable, homogène à une force électromotrice de pile, est $M\dfrac{\partial i}{\partial t}$ (n° 186), ou E' (n° 191-192).

La forme électromotrice *totale*, **E** (n°s 180–185) est le produit d'une force électromotrice par un temps.

La force électromotrice *élémentaire E'* (n° 180), est une force électromotrice, multipliée par un temps, et divisée par le produit de deux longueurs.

Une force électromotrice de pile est d'ailleurs le produit d'une force électrique par une longueur.

Le potentiel vecteur F_1, F_2, F_3, est le produit d'une force électrique par un temps.

CHAPITRE III

QUELQUES APPLICATIONS

195. — Appliquons maintenant ces équations à la recherche de la force électromotrice induite dans un fil de section finie. Soit un fil rectiligne à section circulaire dont on suppose que les extrémités se rejoignent à grande distance de la région étudiée. Prenons pour axe des z l'axe du fil, tout est de révolution autour de cet axe. Les composantes j_1 et j_2 de la densité du courant sont nulles : il en résulte

$$F_1 = 0, \qquad F_2 = 0.$$

Les composantes F_3 et j_3 dirigées suivant l'axe des z restent seules ; elles satisfont à la relation

$$\Delta F = -4\pi j$$

en tous les points extérieurs ou intérieurs.

Fig. 33

En passant de l'extérieur à l'intérieur, les fonctions F et $\frac{\partial F}{\partial r}$ sont continues. Nous pouvons considérer cette fonction F comme indépendante de z dans toute l'étendue que nous étudions et écrire l'équation précédente

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = -4\pi j.$$

L'intensité I du courant est dans le fil

$$I = \int j . 2\pi r dr$$

la densité j étant une fonction, supposée connue, de r seule.

Le conducteur peut être un cylindre plein ou un tube ; appelons a le rayon intérieur et b le rayon extérieur du tube conducteur.

196. — Partout où il n'y a pas de courant, on a

$$j = o.$$

Par suite, en multipliant l'équation (1) par r

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial F}{\partial r}\right) = o,$$

et

(2) $$F = A \log r + B.$$

Si A est différent de zéro, cette formule donne une valeur infinie pour r infini ; mais il ne faut pas nous arrêter à cette difficulté qui tient à ce que l'hypothèse qu'il n'y a pas de fil de retour est incompatible avec celle que le courant est fermé ; nous savons à l'avance qu'à grande distance les résultats ne seront pas applicables, il n'est donc pas nécessaire de faire $A = o$.

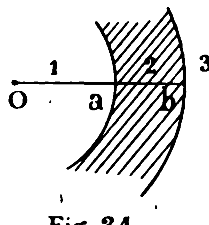


Fig. 34

Si le conducteur est tubulaire, la valeur infinie à distance finie, pour $r = o$, est inadmissible ; il faut faire alors $A = o$; ainsi F est constant à l'intérieur de la cavité.

197. — La distribution de j en fonction de r étant donnée, l'équation (1) donne

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial F}{\partial r}\right) = -4\pi j r$$

d'où

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = A - 4\pi \int_a^r jrdr.$$

Appelons i l'intensité totale du courant compris entre la paroi interne du conducteur et le cercle de rayon r,

(3) $$i = \int_a^r j\, 2\pi rdr.$$

Nous pourrons écrire

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = A - 2i,$$

ce qui donne dans le tube conducteur

(4) $$F = A \log r + B - 2\int_a^r \frac{i}{r}\, dr.$$

198. — Cherchons maintenant comment les constantes se rattachent les unes aux autres en passant d'un milieu au milieu voisin.

1° Supposons que, quand le rayon r augmente, nous passions d'un milieu isolant à un milieu conducteur pour $r = a$.

Dans l'isolant, nous aurons à la surface

$$F = A_1 \log a + B_1$$

dans le conducteur, le troisième terme étant nul,

$$F = A_2 \log a + B_2.$$

Nous avons donc

$$A_1 \log a + B_1 = A_2 \log a + B_2$$

Ecrivons de même que $\frac{\partial F}{\partial r}$ est continu : il vient

$$\frac{A_1}{a} = \frac{A_2}{a}.$$

Par suite, en passant d'un isolant intérieur à un conducteur extérieur, on a

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_1 = A_2 \\ B_1 = B_2. \end{array} \right.$$

199. — 2° Effectuons le passage inverse du conducteur à l'isolant quand le rayon croît, pour la valeur $r = b$.

Dans le conducteur, nous avons

$$F = A_2 \log b + B_2 - 2C_2$$

en posant

$$C_2 = \int_a^b i \frac{dr}{r}.$$

Dans l'isolant

$$F = A_3 \log b + B_3;$$

d'où

$$A_2 \log b + B_2 - 2C_2 = A_3 \log b + B_3.$$

La continuité de $\frac{\partial F}{\partial r}$ donne

$$\frac{A_2}{b} - \frac{2I}{b} = \frac{A_3}{b}$$

I désigne ici l'intensité totale du courant dans le conducteur. Donc

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} A_3 = A_2 - 2I \\ B_3 = 2I \log b + B_2 - 2C_2. \end{array} \right.$$

200. Densité de courant uniforme. — Nous examinerons en

particulier le cas où la densité du courant serait uniforme ; dans ce cas, on a pour la valeur r

(7) $$i = j \int_a^r 2\pi r dr = j\pi(r^2 - a^2)$$

par suite

$$C = j\pi \int_a^r \left(r dr - \frac{a^2 dr}{r}\right)$$

(8) $$C = j\pi\left(\frac{r^2 - a^2}{2} - a^2 \log \frac{r}{a}\right).$$

Pour avoir C_2, il suffit de faire $r = b$; remarquons alors que $\pi(b^2 - a^2)$ étant la surface entière du conducteur, $\pi j(b^2 - a^2)$ sera l'intensité totale I et l'on aura

(9) $$C_2 = \frac{I}{2} - I \frac{a^2}{b^2 - a^2} \log \frac{b}{a}.$$

Dans le cas d'un seul tube annulaire, on a à l'intérieur

$$A_1 = o$$

et

$$F_1 = B_1.$$

On en déduit, d'après les relations (5) et (6), dans l'épaisseur du conducteur

$$F_2 = B_1 - 2C$$

à l'extérieur

$$F_3 = - 2I \log \frac{r}{b} + B_1 - 2C_2.$$

201. — Dans l'expression de F_2, la constante B_1 représente l'action des parties éloignées du circuit ; la quantité C relative à la self-induction est une fonction de r ; si donc, à un instant, l'intensité est uniforme, il n'est pas permis de supposer que sa variation sera uniforme dans toute la section.

La force électromotrice varie avec r, comme C ; c'est à dire dans le cas d'une densité de courant uniforme comme la quantité trouvée

$$j\pi\left[\frac{r^2 - a^2}{2} - a^2 \log\frac{r}{a}\right].$$

Au premier terme correspond une parabole (fig. 35). et au second une courbe logarithmique, passant toutes deux par le point d'abscisse a où elles se touchent ; la force électromotrice est représentée par la différence des deux ordonnées.

L'allure de la courbe qu'on obtiendrait ainsi, en prenant pour

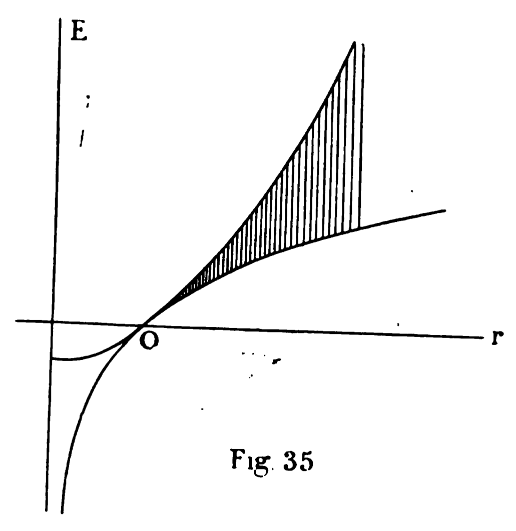


Fig. 35

abscisse les multiples du rayon intérieur a, est donné par le tableau suivant

$x = a$	$C = 0$
$2a$	$1{,}6\pi a^2 j$
$3a$	$5{,}8\pi a^2 j$
$4a$	$12{,}2\pi a^2 j$
$5a$	$21{,}8\pi a^2 j$

Cette quantité C croît donc avec une grande rapidité quand on approche du bord extérieur, où le terme parabolique devient prédominant.

La force électromotrice de self-induction est donc plus grande vers la surface extérieure du tube.

202. Cylindres concentriques. — Prenons encore un cas simple : celui de deux cylindres concentriques donnant passage au courant l'un dans un sens et l'autre en sens contraire (fig. 36) : la condition que le circuit soit fermé sera remplie, en admettant que les deux intensités totales sont égales. Nous aurons d'après les formules (5) et (6)

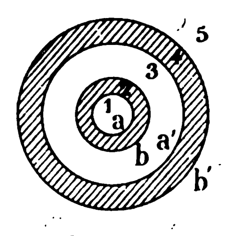


Fig 36

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 = B_1 \\ F_2 = B_1 - 2C \\ F_3 = -2I \log \frac{r}{b} + B_1 - 2C_2 \\ F_4 = -2I \log \frac{r}{b} + B_1 - 2C_2 - 2C' \\ F_5 = \left\{ \begin{array}{l} -2(I' + I) \log r + 2I' \log b' \\ + B_1 - 2C_2 + 2I \log b - 2C'_4 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

C' et C'_4 étant pour le tube 4 les quantités analogues à C et C_2 du tube 2.

Or si le circuit est fermé, on doit avoir

$$I + I' = 0$$

ce qui fait disparaître le terme en $\log r$ dans F_5. En outre, il faut que la force électromotrice soit nulle dans le dernier isolant ; ce qui détermine la constante B_1 par l'équation

$$B_1 = +2I \log \frac{b'}{b} + 2(C'_4 + C_2)$$

d'où

$$(11) \quad B_1 = +2I \log \frac{b'}{b} + 2\int_{a'}^{b'} I' \frac{dr}{r} + 2\int_a^b I \frac{dr}{r}.$$

203. — Nous avons ainsi dans les conducteurs :

$$\left\{\begin{aligned} F_2 &= \frac{I}{b'^2 - a'^2}\left[a'^2 - b'^2 - 2b'^2 \log\frac{a'}{b'} + \right.\\ &\left. + 2(a'^2 - b'^2)\log\frac{b}{a'} - \frac{a'^2 - b'^2}{a^2 - b^2}\left(r^2 - b^2 - 2a^2\log\frac{r}{b}\right)\right]\\ F_4 &= \frac{I}{b'^2 - a'^2}\left[r^2 - b'^2 - 2b'^2\log\frac{r}{b'}\right]. \end{aligned}\right.$$

Il y a dans ces expressions une partie constante et une partie fonction de r; si on était sûr que celle-ci n'est qu'une petite fraction de la première, on pourrait, en faisant une moyenne même un peu arbitraire, avoir un bon résultat; mais si b est un grand multiple de a, le terme en r^2 prend une grande importance, et si a est nul, son influence est encore plus grande dans l'expression de F_2.

204. — On fait en général la convention suivante : on admet qu'on peut prendre pour valeurs moyennes de F_2 et de F_4 les expressions obtenues en faisant les moyennes par rapport aux surfaces : on prendra

$$(12) \qquad F_2 = \int_a^b \frac{F_2 \times 2\pi r dr}{\pi(b^2 - a^2)}.$$

Remarquons que nous pouvons décomposer le courant total en courants tous parallèles à l'axe des z; pour l'un d'eux situé à la distance r, la valeur de la force électromotrice est

$$-\frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

La densité du courant qu'elle produit, est

$$-k\frac{\partial F_2}{\partial t};$$

et le courant induit total dans la section droite sera

$$-k\int_a^b \frac{\partial F_2}{\partial t} 2\pi r dr.$$

Cela justifie l'expression que nous avons prise pour la valeur moyenne de F_2 ; en effet ce qui est accessible aux expériences, ce n'est pas la distribution des densités de courant, mais seulement l'intensité totale : or, celle-ci est la même que celle qui serait induite d'une manière uniforme par la force électromotrice moyenne en surface.

Toutefois, dès que l'intensité du courant cesse d'être uniforme, au moins approximativement la distribution de F cesse d'être représentée par les équations (10). Il faut alors poser le problème autrement.

205. — La force électromotrice dans le conducteur (4) est de même

$$-\frac{\partial F_4}{\partial t}$$

avec la même convention sur les signes ; mais si nous voulons avoir l'ensemble des forces électromotrices pour les deux conducteurs dans la même région et par unité de hauteur, il faudra prendre dans le conducteur (2) le signe — et dans le conducteur (4) le signe + puisque nous sommes dans le conducteur de retour ; on aura par suite en prenant les valeurs moyennes,

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\overline{F}_2 - \overline{F}_4)$$

expression que l'on peut écrire

(13) $$E = -\frac{\partial I}{\partial t}\left(\frac{\overline{F}_2 - \overline{F}_4}{I}\right),$$

le second facteur est indépendant de I : c'est une caractéristique des circuits.

206. — Nous avons donc à faire les moyennes suivantes :

1° $$\int_a^b \frac{r^2 . 2\pi r\,dr}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{b^2 + a^2}{2}$$

2° $$\int_a^b \frac{\log r . 2\pi r\,dr}{\pi(b^2 - a^2)} = \frac{1}{b^2 - a^2}\left[b^2 \log b - a^2 \log a - \frac{b^2 - a^2}{2}\right].$$

En faisant la substitution dans (13) on trouve

$$E = \frac{\partial I}{\partial t}\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2} + \frac{1}{2}\frac{b'^2+a'^2}{b'^2-a'^2} \\ + \frac{2a^4}{(b^2-a^2)^2}\log\frac{a}{b} + \frac{2b'^4}{(b'^2-a'^2)^2}\log\frac{a'}{b'} \\ - 2\log\frac{a'}{b} \end{array}\right].$$

Tous les termes sont négatifs, sauf les deux premiers peu importants, et la force électromotrice est toujours négative : les termes de la 2e ligne caractérisent l'induction entre les deux parties d'un même fil ; celui de la troisième ligne seul provient de l'induction du fil d'aller sur le fil de retour ; il pourra d'ailleurs être le principal.

207. — Il est rare que dans la construction des cables on laisse un trou central ; on peut donc faire $a = o$ et écrire la force électromotrice E sous la forme

(14) $$E = -\frac{\partial I}{\partial t}\left[2\log\frac{a'}{b} + \mathfrak{B}\right].$$

Le terme $\mathfrak{B}$ ne dépend que de $\frac{a'}{b'}$: c'est lui qui indique l'importance de l'épaisseur de la couronne de retour.

Les deux tableaux suivants nous donnent la valeur des deux termes.

$\frac{b'}{a'}$	$\mathfrak{B}$	$\frac{a'}{b}$	$2\log\frac{a'}{b}$
1	0,50	1,1	0,19
1,23	0,65	»	»
1,41	0,77	1,5	0,8
1,73	0,97	»	»
2	1,13	2	1,38
4	2,09	»	»
»	»	7	3,9
∞	∞	»	»

Si l'épaisseur de l'isolant est très petite ; c'est le terme $\mathfrak{B}$ qui a seul de l'importance.

Si l'on veut donner de l'importance à l'induction mutuelle entre les deux conducteurs, il faut que la couronne extérieure soit mince et l'isolant épais ; dans le cas contraire, c'est la self induction de la couronne de retour qui l'emporte.

La force électromotrice ainsi obtenue, et par suite le coefficient de self-induction du câble par unité de longueur dépend de la distribution supposée uniforme de la densité de courant.

208 Deux fils parallèles. Approximation. — Occupons-nous maintenant d'un cas important par ses applications : deux fils parallèles placés très loin l'un de l'autre parcourus par des courants uniformes d'aller et de retour. Le potentiel vecteur F résulte du courant de densité j dans le premier fil et du courant de densité j' dans le deuxième ; en ajoutant en chaque point les deux valeurs correspondantes, nous supposons d'abord que la valeur de F due au premier fil est uniforme dans toute l'étendue du second et inversement. Cette approximation est celle que nous avons faite en admettant que la distance des deux fils est un grand multiple du diamètre de chacun d'eux.

Le potentiel vecteur qui provient du premier fil est, à l'intérieur de ce fil,

(15) $$F = B - \pi j (r^2 - b^2),$$

et à l'extérieur

(16) $$F = B - 2\pi b^2 j \log \frac{r}{b},$$

en tenant compte des conditions de continuité.

On a de même pour le second fil, à l'extérieur,

(17) $$F' = B' - 2\pi b'^2 j' \log \frac{r'}{b'},$$

et à l'intérieur

(18) $$F' = B - \pi j' (r'^2 - b'^2).$$

209. — Soit D, la distance des centres des deux fils ; en traitant comme uniforme dans chaque fil le potentiel dû à l'autre, nous avons alors :

Intérieur du premier fil :

$$F + F'_D = B + B' - 2\pi b'^2 j' \log \frac{D}{b'} - \pi j (r^2 - b^2).$$

Intérieur du second fil :

$$F_D + F' = B + B' - 2\pi b^2 j \log \frac{D}{b} - \pi j' (r'^2 - b'^2).$$

Espace extérieur aux deux fils :

$$F + F' = B + B' - 2\pi b^2 j \log \frac{r}{b} - 2\pi b'^2 j' \log \frac{r'}{b'}.$$

Les conditions de continuité sont satisfaites à la surface des deux fils ; restent les conditions à l'infini. A très grande distance, r, et r' deviennent identiques, et pour que $F + F'$ y devienne nul, il faut que l'on ait

$$(19) \quad \begin{cases} B + B' + 2\pi b^2 j \log b + 2\pi b'^2 j' \log b' = 0 \\ 2\pi b^2 j + 2\pi b'^2 j' = 0. \end{cases}$$

La seconde de ces équations montre que les intensités totales $\pi b^2 j$, et $\pi b'^2 j'$ dans les deux fils doivent être égales et opposées ; c'est ce que nous exprimons en disant que le second fil sert de fil de retour au courant I du premier fil. Mettant ce courant total en évidence, il vient alors

$$B + B' = - 2I \log \frac{b}{b'}$$

et enfin

$$(20) \quad \begin{cases} F + F_D = - I\left(\frac{r^2}{b^2} - 1\right) - 2I \log \frac{b}{D} \\ F + F' = - 2I \log \frac{r}{r'} \\ F_D + F' = + I\left(\frac{r'^2}{b'^2} - 1\right) + 2I \log \frac{b'}{D} \end{cases}$$

à l'intérieur du 1[er] fil, entre les deux, et à l'intérieur du 2[e] fil.

Ces expressions supposent une répartition uniforme du courant dans chacun des fils.

210. — Si on suppose que les deux fils se réjoignent à grande distance, on peut chercher la force électromotrice produite par unité de longueur de l'ensemble des deux fils parallèles.

C'est pour le premier fil

$$-\frac{\partial I}{\partial t}\left\{-\left(\frac{r^2}{b^2}-1\right)+2\log\frac{D}{b}\right\}$$

pour le second

$$-\frac{\partial I}{\partial t}\left\{\left(\frac{r'^2}{b'^2}-1\right)-2\log\frac{D}{b'}\right\}.$$

La différence de ces deux expressions donne la force électromotrice totale, bien entendu après avoir fait la moyenne dans chaque fil comme précédemment, ce qui n'est pas absurde dans le cas actuel : en effet le terme $\frac{r^2}{b^2}$ est compris entre o et 1, tandis que le terme $\log\frac{D}{b}$, très grand dès que les fils sont assez éloignés, est prépondérant. On trouve alors

$$\text{Moy.}\ \frac{r^2}{b^2}=\frac{1}{2}$$

et par suite la force électromotrice totale est

$$(21) \qquad -\frac{\partial I}{\partial t}\left[1+2\log\frac{D^2}{bb'}\right].$$

Telle est la formule classique de la force électromotrice de self induction par unité de longueur dans l'ensemble de deux fils parrallèles d'aller, et de retour. Cette self induction décroit, quand la distance D diminue ; et, si la formule était encore théoriquement valable dans ce cas, on en déduirait, que, lorsque les fils égaux ($b = b'$) sont en contact ($D = b + b'$), leur coefficient de self induction aurait pour valeur minimum, ($1 + 2\log 4 = 3{,}77$). Mais une telle extension de la formule est tout à fait incompatible avec son origine approximative ; la réaction d'un des fils sur l'autre n'est sensiblement uniforme dans toute la section que si les deux fils sont très éloignés l'un de l'autre.

CHAPITRE IV

FILS PARALLÈLES

211. Le problème des fils parallèles, que nous avons traité seulement d'une manière approchée, en supposant très grande la distance qui les sépare, peut être traité d'une manière rigoureuse, pour toute distance, même petite, comme nous allons le voir. Seul, le cas du contact des deux fils restera encore exclu. Considérons dans le plan un système de coordonnées orthogonales λ et μ, (fig. 37) et posons

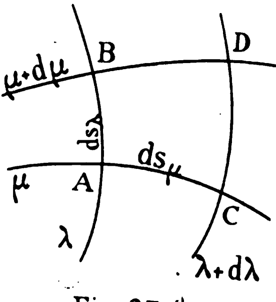


Fig. 37

$$(1)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 = h_1^2 \\ \left(\frac{\partial\mu}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\mu}{\partial y}\right)^2 = h_2^2. \end{cases}$$

Le long d'une ligne $\mu =$ cte on a

$$d\lambda = h_1\, ds_\mu$$

et le long d'une ligne $\lambda =$ cte

$$d\mu = h_2\, ds_\lambda.$$

212. — Formons dans ce nouveau système de coordonnées l'équation aux dérivées partielles qui correspond à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -4\pi j.$$

Partons, pour cela, de la signification physique de l'équation électrostatique analogue

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -4\pi e :$$

« le flux de force qui sort d'un contour est égal au produit par 4π de la masse électrique intérieure au contour » et formons l'expression de ce flux de force pour un contour rectangulaire λ, $\lambda + d\lambda$, μ, $\mu + d\mu$.

La force a pour composante normale à A B,

$$(2) \qquad -\frac{\partial V}{\partial s_\mu} = -h_1 \frac{\partial V}{\partial \lambda}$$

et le flux de force qui entre par AB est

$$(3) \qquad ds_\lambda \left(-\frac{\partial V}{\partial s_\mu}\right) = -\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\, d\mu.$$

L'excès du flux qni sort par CD, sur celui qui entre par AB, est

$$(4) \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(-\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) d\lambda\, d\mu.$$

De même, pour les côtés AC, BD, l'excès sortant est

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(-\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \mu}\right) d\lambda\, d\mu.$$

Quant à la masse électrique interne, elle est égale au produit de la densité e par la surface $ds_\lambda\, ds_\mu = \frac{d\lambda d\mu}{h_1 h_2}$.

L'équation des flux est donc, en coordonnées orthogonales quelconques,

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \mu}\right) = -\frac{4\pi e}{h_1 h_2}.$$

On a donc enfin

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{h_1}{h_2}\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{h_2}{h_1}\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)\right].$$

213. — Lorsque les coordonnées orthogonales λ, μ, sont isothermes,

$$\Delta\lambda = o, \qquad \Delta\mu = o,$$

on en déduit, en remplaçant V par λ, et par μ, dans l'équation précédente

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{h_1}{h_2}\right) = o, \quad \frac{\partial}{\partial\mu}\left(\frac{h_2}{h_1}\right) = o.$$

Les deux quantités h_1, h_2, sont partout égales ; les coordonnées λ, μ, divisent le plan en petits carrés, inégaux d'ailleurs ; les courbes d'égale dimension des carrés sont les courbes h_1 = cte.

L'équation prend alors la forme plus simple

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\lambda^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\mu^2} = -\frac{4\pi}{h^2}\, e.$$

214. Fil unique. Coordonnées polaires. — Comme premier exemple, examinons comment, pour un seul fil cylindrique circulaire, on peut déterminer la distribution des forces électromotrices dues à une variation du courant, distribué d'une manière arbitraire dans la section. Prenons pour coordonnées, les coordonnées polaires

$$\alpha, \qquad \rho = \log r,$$

qui constituent un système de coordonnées orthogonales et isothermes.

L'équation

$$\Delta F = -4\pi j$$

devient

$$(8) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2} = -4\pi e^{2\rho} j.$$

j est une fonction de ρ et de α, que nous supposons développée en série de la forme

$$(9) \qquad j = \sum (S_n \sin n\alpha + C_n \cos n\alpha),$$

S et C étant des fonctions de ρ.

Cherchons une solution de la forme

$$F = \sum (H_n \sin n\alpha + G_n \cos n\alpha) \tag{10}$$

H et G étant aussi des fonctions de ρ ; on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} = \sum (-n^2 H_n \sin n\alpha - n^2 G_n \cos n\alpha) \tag{11}$$

Dérivant (10) par rapport à ρ, puis substituant dans l'équation (8), et identifiant les facteurs de sin $n\alpha$ dans les deux membres, nous aurons pour déterminer H_n

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial \rho^2} - n^2 H_n = -4\pi e^{2\rho} S_n. \tag{12}$$

Une équation semblable donnerait G.

L'équation (12) sans second membre a pour intégrale

$$H_n = Ae^{n\rho} + Be^{-n\rho}$$

et avec le second membre

$$H_n = Ae^{n\rho} + Be^{-n\rho} + \frac{e^{n\rho}}{2n} \int_{-\infty}^{\rho} e^{-n\rho}(-4\pi S_n e^{2\rho})\, d\rho$$
$$- \frac{e^{-n\rho}}{2n} \int_{-\infty}^{\rho} e^{n\rho}(-4\pi S_n e^{2\rho})\, d\rho$$

ce qui donne la solution complète du problème.

215. Coordonnées Bipolaires. — Comme second exemple, revenons au cas de deux fils circulaires parallèles. Les coordonnées orthogonales isothermes convenables sont alors le logarithme du

rapport des distances d'un point à deux points fixes, O_1 O_2 et l'a
sous lequel on voit la distance D de ces deux points.

(13) $$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \log r_1 - \log r_2 \\ \alpha = \omega_1 - \omega_2. \end{array} \right.$$

Les courbes α = cte sont, comme on sait, des circonfére
passant par les points O_1, O_2 ; et les courbes ρ = cte, des cir
férences qui entourent ces points.

Des calculs faciles donnent, pour équations de ces deux systèmes
circonférences

(14) $$x^2 + \left(y - \frac{D}{2}\cot\alpha\right)^2 = \frac{D^2}{4\sin^2\alpha}$$

et

(15) $$\left(x - \frac{D}{2}\frac{\mathrm{Ch}\rho}{\mathrm{Sh}\rho}\right)^2 + y^2 = \frac{D^2}{4\,\mathrm{Sh}^2\rho}$$

en désignant les sinus et cosinus hyperboliques par

(16) $$\mathrm{Sh}\rho = \frac{1}{2}\left(e^{\rho} - e^{-\rho}\right),\quad \mathrm{Ch}\rho = \frac{1}{2}\left(e^{\rho} + e^{-\rho}\right).$$

216. — Une circonférence ρ_1, celle qui limite le premier fil
exemple, a donc pour rayon

(17) $$R_1 = \frac{D}{2\,\mathrm{Sh}\rho_1} \qquad \rho_1 < o$$

et son centre est défini par

(18) $$x_1 = \frac{D}{2}\frac{\mathrm{Ch}\rho_1}{\mathrm{Sh}\rho_1} \qquad y_1 = o.$$

La distance des centres $\mathfrak{D}$, n'est donc pas égale à D :

(19) $$\mathfrak{D} = D\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Ch}\rho_1}{\mathrm{Sh}\rho_1} - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{Ch}\rho_2}{\mathrm{Sh}\rho_2}\right).$$

Si par exemple la distance D est égale au double du diamètre
deux fils, supposés égaux, la distance $\mathfrak{D}$ de leurs centres est 1,11

Si ρ_1 et ρ_2 sont négatifs, les deux circonférences entourent toutes deux le point O_1 ; cela correspond à un fil cylindrique, entouré d'un tube conducteur excentrique. Ce n'est pas le cas dont nous nous occuperons.

Si ρ_1 est négatif et ρ_2 positif, la circonférence ρ_1 entoure le point O_1, la circonférence ρ_2 entoure le point O_2, ce qui correspond bien aux fils conducteurs séparés.

217. — Les coordonnées d'un point P sont

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \frac{D}{2}\,\frac{\mathrm{Sh}\rho}{\mathrm{Ch}\rho - \cos\alpha} \\ y &= \frac{D}{2}\,\frac{\sin\alpha}{\mathrm{Ch}\rho - \cos\alpha}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, on obtient facilement

$$(21)\qquad h^2 = \left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y}\right)^2 = 4\,\frac{(\mathrm{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}{D^2}.$$

L'équation à intégrer

$$\Delta F = -\,4\pi j$$

devient alors, dans le système de coordonnées bipolaires :

$$(22)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha^2} = -\,\pi j\,\frac{D^2}{(\mathrm{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}.$$

218. Isolant. — Dans tout l'isolant où le courant est nul, l'intégrale est

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} F = A_0 + B_0\rho &+ \sum \left(A_n e^{n\rho} + B_n e^{-n\rho}\right)\cos n\alpha \\ &+ \sum \left(a_n e^{n\rho} + b_n e^{-n\rho}\right)\sin n\alpha. \end{aligned}\right.$$

Comme ρ devient nul à l'infini, il vient

$$F_\infty = A_0 + \sum (A_n + B_n)\cos n\alpha + \sum (a_n + b_n)\sin n\alpha$$

ce qui conduirait à prendre la forme particulière, rigoureusement nulle à l'infini.

$$(24)\quad F = B_0\rho + \sum (A_n \cos n\alpha + a_n \sin n\alpha)\left(e^{n\rho} - e^{-n\rho}\right)$$

lorsque les deux courants d'aller et de retour sont égaux.

219. Conducteurs. — Occupons-nous maintenant des conducteurs :

Supposons que nous ayons obtenu le développement du second membre sous la forme

$$(25)\quad -\pi j \frac{D^2}{(\text{Ch}\rho - \cos\alpha)^2} = \sum (S_n \sin n\alpha + C_n \cos n\alpha).$$

S_n et C_n étant deux fonctions de ρ.

L'intégrale peut être mise sous la forme

$$(26)\quad F = \sum (s_n \sin n\alpha + c_n \cos n\alpha)$$

avec

$$(27)\quad c_n = \begin{cases} A_n e^{n\rho} + B_n e^{-n\rho} \\ + \dfrac{e^{n\rho}}{2n} \displaystyle\int^{\rho} e^{-n\rho} C_n d\rho - \dfrac{e^{-n\rho}}{2n} \displaystyle\int^{\rho} e^{n\rho} C_n d\rho \end{cases}$$

$$(28)\quad s_n = \begin{cases} A_n e^{n\rho} + B_n e^{-n\rho} \\ + \dfrac{e^{n\rho}}{2n} \displaystyle\int^{\rho} e^{-n\rho} S_n d\rho - \dfrac{e^{-n\rho}}{2n} \displaystyle\int^{\rho} e^{n\rho} S_n d\rho. \end{cases}$$

Il faudra déterminer les constantes A_n et B_n et les origines d'intégration de la façon la plus favorable pour la suite des calculs. Si j variait d'une façon continue dans tout l'espace, nous pourrions prendre $-\infty$ pour origine des intégrations sans introduire les termes en A_n, B_n ; mais quand l'intensité du courant est concentrée dans les cercles correspondant aux valeurs ρ_1, ρ_2, il est plus commode

de conserver A_n et B_n et de déterminer ces constantes par continuité à la surface.

Pour $n = o$, conservons seulement C_0 et c_0 ; la relation (27) prend la forme particulière

$$c_0 = A + B\rho + \int^{\rho} d\rho \int C_0\, d\rho.$$

220. Courant uniforme. — Ce qui précède s'applique à une distribution de densité de courant arbitraire ; examinons le cas où elle est uniforme. S_n et C_n ont pour valeurs en général :

$$(29)\quad \begin{cases} S_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} -\frac{\pi j D^2}{(\mathrm{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}\sin n\alpha\, d\alpha \\ C_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} -\frac{\pi j D^2}{(\mathrm{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}\cos n\alpha\, d\alpha. \end{cases}$$

Ici ces formules se simplifient car j sort du signe $\int$ et l'intégration devient possible ; il suffira de calculer les intégrales

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin n\alpha\, d\alpha}{(\mathrm{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\alpha\, d\alpha}{(\mathrm{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}$$

La première intégrale est nulle, parce que tous les termes entre o et π, sont exactement compensés par des termes égaux et de signe contraire entre π et 2π.

La seconde se calcule sans difficulté, en appliquant par exemple les règles élémentaires. Posons :

$$\mathrm{Ch}\,\rho = \zeta_0 \qquad \cos\alpha = \zeta, \qquad d\alpha = -\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

la formule de Moivre donne pour $\cos n\alpha$, un polynôme P_n de degré

n en ζ ; en tenant compte de la parité et de l'ordre des limites d'intégration, on en déduit

$$\int_o^{2\pi} \frac{\cos n\alpha \, d\alpha}{(\text{Ch}\,\rho - \cos\alpha)^2} = 2\int_{-1}^{+1} \frac{P_n \, d\zeta}{(\zeta_0 - \zeta)^2 \sqrt{1-\zeta^2}}$$

et enfin par des transformations classiques,

$$(30) \quad \int_o^{2\pi} \frac{\cos n\alpha \, d\alpha}{(\text{Ch}\,\rho - \cos\alpha)^2} = 8\pi \frac{(n+1)\,p^{n+2} - (n-1)\,p^{n+4}}{(1-p^2)^3}$$

en prenant pour p la racine inférieure à l'unité, de l'équation

$$p^2 - 2p\,\text{Ch}\,\rho + 1 = o.$$

On prendra donc, à l'intérieur du fil 1,

$$-\infty < \rho_1 < o \qquad p = e^{\rho}$$

et à l'intérieur du fil (2)

$$+\infty > \rho_2 > o \qquad p = e^{-\rho}$$

Avec ces conventions l'expression

$$(31) \quad C_n = -8\pi j.\,D^2 \frac{(n+1)p^{n+2} - (n-1)p^{n+4}}{(1-p^2)^3}$$

est applicable aux deux fils.

221. — Portons ces expressions de S_n et de C_n dans c_n ; nous avons à calculer les intégrales

$$-8\pi j\,D^2 \frac{e^{n\rho}}{2n} \int p^{-n} \frac{(n+1)p^{n+2} - (n-1)p^{n+4}}{(1-p^2)^3} \frac{dp}{p}$$

et

$$+ 8\pi j D^2 \frac{e^{-n\rho}}{2\pi} \int p^n \frac{(n+1)p^{n+2} - (n-1)p^{n+4}}{(1-p^2)^3} \frac{dp}{p}.$$

222. Premier fil.— Occupons-nous d'abord du fil 1 ; l'intégration doit-être étendue de $\rho = -\infty$, c'est-à-dire de $p = o$, jusqu'à la valeur ρ du cercle passant par le point intérieur considéré c'est-à-dire jusqu'à $p = e^\rho$.

Remarquons d'ailleurs que les deux intégrations donneront pour ces expressions des termes du même ordre en p et qu'il n'y a par suite aucune raison de négliger une intégrale devant l'autre.

L'intégration se fait sans difficultés et donne pour la première expression

$$-8\pi j D^2 \frac{e^{n\rho}}{2n} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(1-e^{2\rho})^2} + \frac{n-1}{1-e^{2\rho}} - n\right],$$

pour la deuxième

$$+ 8\pi j D^2 \frac{e^{-n\rho}}{2n} \frac{1}{2} \frac{e^{(2n+2)\rho}}{(1-e^{2\rho})^2}.$$

Toutes réductions faites, on trouve

$$(32) \qquad c_n = A_n e^{n\rho} + B_n e^{-n\rho} - 2\pi j D^2 \frac{e^{(n+2)\rho}}{1-e^{2\rho}}.$$

Le terme c_0 a la forme particulière

$$c_0 = A + B\rho - 2\pi j D^2 \frac{e^{2\rho}}{1-e^{2\rho}}.$$

Portons ces valeurs dans l'expression (26) et accentuons tous les coefficients pour rappeler qu'il s'agit du premier fil :

$$F = \begin{cases} A' + B'\rho - 2\pi j' D^2 \dfrac{e^{2\rho}}{1-e^{2\rho}} \\ + \sum \left(A'_n e^{n\rho} + B'_n e^{-n\rho} - 2\pi j' D^2 \dfrac{e^{2\rho}}{1-e^{2\rho}} e^{n\rho}\right) \cos n\alpha. \end{cases}$$

Ce fil s'étendant jusqu'à l'origine O', pour laquelle ρ est $-\infty$, B' et tous les B'_n sont nuls, pour que F' n'y devienne pas infini, et il reste

$$(33)\qquad F' = \begin{cases} A' + \sum A'_n e^{n\rho} \cos n\alpha \\ -2\pi j' D^2 \dfrac{e^{2\rho}}{1-e^{2\rho}} \left(1 + \sum e^{n\rho} \cos n\alpha\right). \end{cases}$$

223. Deuxième fil. — Changeant ρ est $-\rho$, et j' en j'', on a de même pour l'intérieur du second fil

$$(34)\qquad F'' = \begin{cases} A'' + \sum A''_n e^{-n\rho} \cos n\alpha \\ -2\pi j'' D^2 \dfrac{e^{-2\rho}}{1-e^{-2\rho}} \left(1 + \sum e^{-n\rho} \cos n\alpha\right). \end{cases}$$

224. Conditions de continuité. — Écrivons maintenant les conditions de continuité à la surface $\rho = \rho_1$ du premier fil et à la surface $\rho = \rho_2$, du second fil, en conservant l'expression complète (24) pour l'isolant, et les expressions (33), (34), pour les conducteurs.

Puisqu'il n'y a pas de termes en sin $n\alpha$ dans les conducteurs a_n et b_n sont nuls dans (24).

Termes indépendants de α.

$\rho = \rho_1$, Continuité de F :

$$A' - 2\pi j' D^2 \frac{e^{2\rho_1}}{1-e^{2\rho_1}} = A_0 + B_0 \rho_1.$$

Continuité de $\dfrac{\partial F}{\partial \rho}$:

$$-2\pi j' D^2 . 2 \frac{e^{2\rho_1}}{\left(1-e^{2\rho_1}\right)^2} = B_0.$$

Remarquons maintenant que l'expression (17) du rayon R_1 nous donne pour la surface de section du premier fil

$$S_1 = \frac{\pi D^2}{\left(e^{\rho_1} - e^{-\rho_1}\right)^2} = \pi D^2 \frac{e^{2\rho_1}}{\left(1-e^{2\rho_1}\right)^2}$$

l'intensité totale I' dans le premier fil est

$$I' = S_1 j' = \pi D^2 j' \frac{e^{2\rho_1}}{\left(1 - e^{2\rho_1}\right)^2}$$

et les équations de continuité deviennent pour le premier fil

$$(35) \quad \begin{cases} A_0 + B_0 \rho_1 = A' - 2 I' \left(1 - e^{2\rho_1}\right) \\ B_0 = -4 I'. \end{cases}$$

Le second fil donnera de même

$$(36) \quad \begin{cases} A_0 + B_0 \rho_2 = A'' - 2 I'' \left(1 - e^{-2\rho_2}\right) \\ B_0 = +4 I'' \end{cases}$$

car on a pour l'intérieur du second fil

$$S_2 = \frac{\pi D^2}{\left(e^{\rho_2} - e^{-\rho_2}\right)^2} = \pi D^2 \frac{e^{-2\rho_2}}{\left(1 - e^{-2\rho_2}\right)^2}$$

et de plus la dérivation en ρ change les signes dans la seconde équation.

225. — De là on déduit d'abord

$$I' + I'' = o.$$

La forme d'intégrale fournie naturellement par les solutions simples de notre système de coordonnées isothermes orthogonales exige que le courant de retour soit égal au courant d'aller. Bien entendu, ce n'est pas là une condition imposée par le choix des coordonnées, mais seulement par le choix des solutions simples, qui excluent les singularités à l'infini ($\rho = o$).

Les deux premières équations, qui deviennent alors,

$$(37) \quad \begin{cases} A' - A_0 = 2 I' \left(1 - 2\rho_1 - e^{2\rho_1}\right) \\ A'' - A_0 = -2 I'' \left(1 + 2\rho_2 - e^{-2\rho_2}\right) \end{cases}$$

ne déterminent que les différences $A' - A_0$, $A'' - A_0$.

S'il n'y a pas de champ d'induction autre que celui qui provient des deux fils, on doit prendre A_0 nul.

226. *Termes en* cos $n\alpha$. — Les termes en cos $n\alpha$ donnent de même

$$(38)\quad \begin{cases} A'_n e^{n\rho_1} - 2I'(1 - e^{2\rho_1})e^{n\rho_1} = A_n e^{n\rho_1} + B_n e^{-n\rho_1} \\ nA'_n e^{n\rho_1} - 2I' e^{n\rho_1}(n + 2 - n e^{2\rho_1}) = nA_n e^{n\rho_1} - nB_n e^{-n\rho_1} \end{cases}$$

et en tenant compte de $I' + I'' = o$

$$(39)\quad \begin{cases} A''_n e^{-n\rho_2} + 2I'(1 - e^{-2\rho_2})e^{-n\rho_2} = A_n e^{n\rho_2} + B_n e^{-n\rho_2} \\ -nA''_n e^{-n\rho_2} - 2I' e^{-n\rho_2}(n + 2 - n e^{-2\rho_2}) = nA_n e^{n\rho_2} - nB_n e^{-n\rho_2} \end{cases}$$

d'où l'on tire facilement

$$(40)\quad \begin{cases} B_n = 2I' \dfrac{e^{2n\rho_1}}{n} \\ A_n = -2I' \dfrac{e^{-2n\rho_2}}{n} \end{cases}$$

puis

$$(41)\quad \begin{cases} A'_n = 2I'(1 - e^{2\rho_1}) + \dfrac{2I'}{n}(1 - e^{-2n\rho_2}) \\ A''_n = -2I'(1 - e^{-2\rho_2}) - \dfrac{2I'}{n}(1 - e^{2n\rho_1}) \end{cases}$$

Lorsque les deux fils ont même diamètre $\rho_1 = -\rho_2$, B_n et A_n, A' et A''_n sont égaux et de signes contraires : mais il n'en est plus de même si les deux fils sont inégaux.

227. — *Paradoxe*. En particulier B_n diffère alors de $-A_n$, et au loin, pour $\rho = o$, on a

$$F_\infty = -2I' \sum \frac{e^{-2n\rho_2} - e^{2n\rho_1}}{n} \cos n\alpha$$

au lieu de

$$F_\infty = o.$$

Mais il n'y a pas lieu d'y voir une difficulté. En effet, nous savons que pour un courant uniforme dans un fil cylindrique, l'expression rigoureuse de F est $-2I' \log r$, r étant compté du centre du fil. Or

nos distances r', r'', sont comptées des points O′, O″, qui ne sont pas les centres des fils, et qui, en outre, sont inégalement éloignés de ces centres, si les fils ne sont pas de même grosseur. En outre, l'action de l'un des fils sur l'autre détruit l'isotropie de distribution des valeurs de F dues à chacun des fils en particulier, et quand les deux fils sont inégaux, il n'y a pas de plan de symétrie des F perpendiculaire au plan des fils, à petite distance, et rien ne permet d'affirmer qu'il y en ait un au loin. Le plan de symétrie de F au loin, s'il existait, passerait au milieu de la distance des centres; il différerait donc du plan de symétrie des coordonnées, quand les deux fils sont inégaux. On ne saurait s'étonner de retrouver la trace de cette dissymétrie dans les valeurs lointaines de F, si on se rappelle que, ce que nous appelons distance infinie dans les problèmes cylindriques *n'est pas* une distance infinie par rapport à *tout* le système agissant, mais seulement une distance de même ordre que la longueur de celui-ci, supposée très grande par rapport aux dimensions transversales.

228. Force électromotrice moyenne. — Dans le premier fil, en un point ρ, α, le potentiel F′ est donné par la formule (33), avec les valeurs (37), (41), des constantes. En ce point l'élément de surface a pour expression

$$\frac{D^2}{4(\text{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}\,d\alpha\,d\rho.$$

La valeur moyenne du potentiel F′ pour toute la surface du fil est donc

$$F'_m = \frac{D^2}{4S_1}\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\rho_1}\int_0^{2\pi}\left(A' - 2\pi j' D^2\frac{e^{2\rho}}{1 - e^{2\rho}}\right)\frac{d\rho\,d\alpha}{(\text{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}\\ &+\sum\int_{-\infty}^{\rho_1}\int_0^{2\pi}\Big[A'_n\,e^{n\rho} -\\ &\qquad - 2\pi j' D^2 e^{n\rho}\frac{e^{2\rho}}{1 - e^{2\rho}}\Big]\frac{d\rho.\cos n\alpha\,d\alpha}{(\text{Ch}\rho - \cos\alpha)^2}.\end{aligned}\right.$$

La formule (30) nous permet d'effectuer toutes les intégrations en α, et donne

$$F'_m = \frac{2\pi D^2}{S_1}\left\{\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\rho_1}\left(A' - 2\pi j' D^2 \frac{e^{2\rho}}{1-e^{2\rho}}\right)\frac{e^{2\rho}}{(1-e^{2\rho})^2}\,d\rho\\ &+\sum\int_{-\infty}^{\rho_1}\left(A'_n - 2\pi j' D^2 \frac{e^{2\rho}}{1-e^{2\rho}}\right)\\ &\qquad\frac{n+1-(n-1)e^{2\rho}}{(1-e^{2\rho})^3}\, e^{(2n+2)\rho}\,d\rho.\end{aligned}\right.$$

229. — Ces quadratures s'effectuent facilement [1].

Pour écrire le résultat, nous poserons

$$Z_{n,1} = \int_0^z \frac{z^n\,dz}{1-z} = -\left[\frac{z^n}{n} + \frac{z^{n-1}}{n-1} + \ldots + z + \log(1-z)\right]$$

$$Z_{n,2} = \int_0^z \frac{z^n\,dz}{(1-z)^2} = \frac{z^{n-1}}{n-1} + 2\frac{z^{n-2}}{n-2} + \ldots + (n-1)z + n\log(1-z) + \frac{1}{1-z} - 1$$

$$Z_{n,3} = \int_0^z \frac{z^n\,dz}{(1-z)^3} = -\frac{1}{2}\left[\begin{aligned}&1.2\,\frac{z^{n-2}}{n-2} + 2.3.\,\frac{z^{n-3}}{n-3} + \ldots +\\ &\qquad + (n-1)(n-2)z\\ &+ n(n-1)\log(1-z) - n - (n-1)\\ &+ \frac{2n}{1-z} - \frac{1}{(1-z)^2}\end{aligned}\right]$$

[1] En posant $e^{2\rho} = z$ on est ramené aux quadratures du texte. On les effectue facilement par les remarques suivantes :

$$\int_0^z \frac{dz}{a-z} = -\log\frac{a-z}{a}; \quad \int_0^z \frac{z^n\,dz}{a-z} = -\frac{z^n}{n} + a\int_0^z \frac{z^{n-1}\,dz}{a-z};$$

d'où l'on tire $Z_{n,1}$; on obtient les suivantes en dérivant par rapport à a ; on fait à la fin seulement $a = 1$.

et enfin

$$Z_{n,4} = \int_0^z \frac{z^n\,dz}{(1-z)^4} = \frac{1}{6}\left[\begin{array}{l} 1.2.3.\,\dfrac{z^{n-3}}{n-3} + 2.3.4.\,\dfrac{z^{n-4}}{n-4} + \ldots \\ \quad + (n-1)(n-2)(n-3)\,z \\ + n(n-1)(n-2)\log(1-z) \\ - n(n-1)(n-2)(n+n-1) \\ - \dfrac{3n(n-1)}{1-z} - \dfrac{3n}{(1-z)^2} + \dfrac{2}{(1-z)^3} \end{array}\right]$$

230. — Dans ces expressions nous remplacerons désormais z par ρ_1 et nous avons enfin

$$F'_m = \frac{2\pi D^2}{S_1}\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}A'\left(\dfrac{1}{1-z} - 1\right) + \dfrac{\pi \Gamma D^2}{S_1}\left(\dfrac{1}{1-z} - \dfrac{1}{2}\,\dfrac{1}{(1-z)^2}\right) \\ + \dfrac{1}{2}\sum \left\{\begin{array}{l} A'_n\left((n-1)\,Z_{n,2} + 2\,Z_{n,3}\right) \\ - \dfrac{2\pi\Gamma D^2}{S_1}\left((n-1)\,Z_{n+1,3} + 2\,Z_{n+1,4}\right). \end{array}\right. \end{array}\right.$$

L'expression de F''_m s'obtient en remplaçant S_1, Γ, ρ_1, par S_2, $-\Gamma$, $-\rho_2$, et les A' par les A''.

On voit combien nous sommes loin, de l'expression du chapitre précédent, et combien la force électromotrice moyenne par unité de longueur $\frac{\partial}{\partial t}(F'_m - F''_m)$ dans l'ensemble des deux fils pourra être différente, lorsque, les deux fils étant rapprochés, ρ_1 et ρ_2 différeront peu de zéro, auquel cas le z auxiliaire est voisin de 1, et tous les termes restent importants.

Il faudrait dresser des tables de ces formules pour apprécier l'ordre de grandeur véritable de l'écart.

Remarquons, pour finir sur ce sujet des fils parallèles, que les coordonnées orthogonales choisies ne permettent pas de traiter le cas de deux fils circulaires en contact. Pour avoir des familles de circonférences en contact, il faudrait prendre le cas limite, où la distance D est nulle, et le traiter directement.

CHAPITRE V

BOBINES CYLINDRIQUES. BOBINES SPHÉRIQUES.

231. Phénomènes d'induction entre deux bobines ou à l'intérieur d'une bobine. — Considérons un courant circulaire et prenons dans le plan du courant les coordonnées polaires r et α. Soient F_1 et F_2 les composantes du potentiel vecteur F suivant Ox et Oy. L'une quelconque de ces composantes satisfait à l'équation fondamentale

$$\Delta F_1 = -4\pi j_1$$

qui devient ici

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2} = -4\pi j_1.$$

Pour ce courant, la force électromotrice est perpendiculaire au rayon vecteur : on a donc

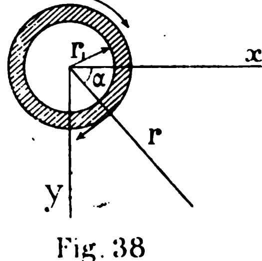


Fig. 38

$$F_1 = -F \sin\alpha \qquad j_1 = -j \sin\alpha$$

et

$$F_2 = F \cos\alpha \qquad j_2 = j \cos\alpha.$$

Substituons dans l'équation (1), il vient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} F + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -4\pi j.$$

F peut-être une fonction de r et de z ; considérons pour le moment le cas où la bobine est illimitée et où z n'intervient pas ; l'équation prend la forme connue

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r^2} F = -4\pi j$$

qui a pour intégrale

(3) $$F = ar + \frac{b}{r} - \frac{r}{2}\int 4\pi j dr + \frac{1}{2r}\int 4\pi j r^2 dr.$$

1° *Dans l'espace intérieur au cylindre*, j est nul ; b est nul car F reste fini ; on a donc

$$F_0 = a_0 r.$$

2° *Dans le conducteur*, il faut prendre l'expression (3) complète.

3° *A l'extérieur*, j est nul ; a est nul, car F est nul à l'infini ; d'où

$$F_2 = \frac{b_2}{r}.$$

232. — Nous supposerons, comme au chapitre précédent, que j est indépendant de r dans l'épaisseur du conducteur ; alors l'expression (3) devient, en intégrant depuis r_1, rayon interne du conducteur,

$$F = ar + \frac{b}{r} - 2\pi j r (r - r_1) + \frac{2\pi j}{r}\frac{r^3 - r_1^3}{3}.$$

Les conditions de continuité s'écrivent sans difficulté :

Sur la surface intérieure

$$\left\{\begin{aligned} F &= a_0 r_1 = a r_1 + \frac{b}{r_1} \\ \frac{\partial F}{\partial r} &= a_0 = a - \frac{b}{r_1^2} \end{aligned}\right.$$

d'où

(4) $$\left\{\begin{aligned} a &= a_0 \\ b &= 0. \end{aligned}\right.$$

On trouve de même pour la deuxième surface r_2

(5) $$\left\{\begin{aligned} a &= 2\pi j (r_2 - r_1) \\ b_2 &= 2\pi j \frac{r_2^3 - r_1^3}{3}. \end{aligned}\right.$$

Dans l'intérieur de la section la force électromotrice varie avec r

et il faudra choisir une moyenne. Mais, pour tenir compte de la résistance, on sera amené à prendre la moyenne par unité d'angle au lieu de la prendre par unité de surface.

233. Self induction d'une bobine. — Il est intéressant d'examiner le cas d'une bobine, c'est-à-dire de supposer le conducteur formé de couches conductrices séparées par des cloisons parallèles à la section droite, et des cloisons cylindriques, infiniment minces et très rapprochées. Il faut alors déterminer pour la tranche comprise entre r et $r + dr$, qui contient un ensemble de ces spires, la force électromotrice totale dans cet ensemble de spires prises bout à bout.

Remarquons que dans ce cas nous nous rapprochons beaucoup de l'uniformité de j, si l'épaisseur des spires est la même ; car, comme elles sont parcourues par le même courant, j ne peut varier que dans la petite épaisseur de chacune.

Supposons qu'il y ait n spires par unité de hauteur de la bobine et par unité de longueur suivant le rayon ; dans l'épaisseur dr il y a ndr spires par unité de hauteur ; la longueur totale de ces spires est

$$2\pi r ndr.$$

La force électromotrice totale pour cette tranche est

$$-2\pi r ndr \frac{\partial F}{\partial t},$$

ce qui donne pour la force électromotrice par unité de hauteur de la bobine

$$-\frac{\partial}{\partial t} 2\pi n \int_{r_1}^{r_2} Frdr.$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} 2\pi n \left\{ a \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} - 2\pi j \left[\frac{r_2^4 - r_1^4}{4} - r_1 \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} \right] + \frac{2\pi j}{3} \left[\frac{r_2^4 - r_1^4}{4} - r_1^3 (r_2 - r_1) \right. \right\}$$

avec

$$a = 2\pi j (r_2 - r_1).$$

D'autre part, i étant l'intensité du courant dans une spire, on a

$$j = ni,$$

il vient finalement, pour la force électromotrice elle-même

(6) $$E = -\frac{\partial i}{\partial t}(2\pi n)^2\left[\frac{r_2^4}{6} - \frac{2}{3}r_2 r_1^3 + \frac{r_1^4}{2}\right] = -L_1\frac{\partial i}{\partial t}.$$

$-L_1\frac{\partial i}{\partial t}$ est la force électromotrice induite par toute la bobine indéfinie, sur les spires comprises dans une hauteur 1 comptée sur l'axe.

Si, sans être infinie, la bobine a une très grande longueur h, cette expression reste très approchée. La force électromotrice induite dans toutes les spires est alors sensiblement $-hL_1\frac{\partial i}{\partial t}$. hL_1 est le coefficient de self-induction approché L de la bobine entière, obtenu directement. Il coïncide avec celui que l'on trouve par la considération du flux de force quand on calcule exactement ce dernier.

Mettons en évidence l'épaisseur $(r_2 - r_1)$ et le nombre total de tours par unité de hauteur de la bobine :

$$L_1 = \{2\pi n (r_2 - r_1)\}^2\left[\frac{r_1^2}{2} + \frac{r_1 r_2}{3} + \frac{r_2^2}{6}\right].$$

Si l'on passe au cas où l'épaisseur est très petite, mais où l'on garde le même nombre de spires par unités de hauteur, on a en faisant $r_1 = r_2$ dans la deuxième parenthèse

$$L_1 = \{2\pi n (r_2 - r_1)\}^2 r_1^2$$

ou, N désignant le nombre total de tours par unité de hauteur,

$$L_1 = (2\pi N)^2 r_1^2.$$

Si la bobine est très longue on a une valeur approchée du coefficient de self-induction en multipliant cette expression par la longueur de la bobine.

$$L = (2\pi N)^2 r^2 h.$$

234. Bobines concentriques. — Examinons maintenant le cas où l'on a plusieurs bobines, placées concentriquement ; il est inutile de faire de nouveaux calculs : il suffit de superposer en chaque point les effets dus aux diverses bobines : prenons deux bobines de rayons r_1 et r_2, R_1 et R_2, de densités de courant j et J, et dont le nombre de spires par unité de longueur est n et N.

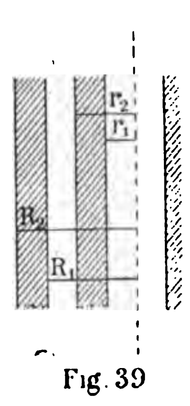


Fig. 39

Dans l'espace interieur à la première bobine

$$F_0 = 2\pi j\,(r_2 - r_1)\,r + 2\pi J\,(R_2 - R_1)\,r.$$

Dans la première bobine

$$F_1 = 2\pi j\left(rr_2 - \frac{2}{3}r^2 - \frac{r_1^3}{3r}\right) + 2\pi J\,(R_2 - R_1)\,r.$$

Dans l'espace compris entre les deux bobines

$$F_2 = 2\pi j\,\frac{r_2^3 - r_1^3}{3r} + 2\pi J\,(R_2 - R_1)\,r.$$

Dans la deuxième bobine

$$F_3 = 2\pi j\,\frac{r_2^3 - r_1^3}{3r} + 2\pi J\left(rR_2 - \frac{2}{3}r^2 - \frac{R_1^3}{3r}\right).$$

Enfin à l'extérieur des deux bobines

$$F_4 = 2\pi j\,\frac{r_2^3 - r_1^3}{3r} + 2\pi J\,\frac{R_2^3 - R_1^3}{3r}.$$

235. — Si nous voulons avoir la force électromotrice induite par

une variation de i à o de la densité du courant de la bobine intérieure dans l'unité de hauteur de la bobine extérieure, il faut prendre la somme

$$\int_{R_1}^{R_2} 2\pi N r dr \times 2\pi j \frac{r_2^3 - r_1^3}{3r}$$

qui donne, avec $j = ni$,

$$2\pi N \times 2\pi n \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} (R_2 - R_1).\ i = M_1 i.$$

Remarquons que les dimensions des deux bobines n'entrent pas d'une manière symétrique dans ce coefficient d'induction mutuelle M_1, on a cependant la même force électromotrice induite quand on a la même variation d'intensité dans n'importe laquelle des bobines : car pour la bobine intérieure il faut former

$$\int_{r_1}^{r_2} 2\pi n r dr .\ 2\pi N I (R_2 - R_1) r$$

d'où l'on tire

$$2\pi n .\ 2\pi N \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} (R_2 - R_1).\ I = M_1 I.$$

Le coefficient M_1 de I est le même que celui de i dans la formule précédente.

Le résultat est évidemment applicable approximativement à deux bobines de même longueur axiale H, très grande, et donne alors

$$M = 2\pi N H .\ 2\pi n \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} (R_2 - R_1).$$

La nature des raisonnements ne permet évidemment pas de supposer les bobines d'inégale longueur.

236. Remarque. — La méthode employée a donné les coefficients d'induction propre L et d'induction mutuelle M sans ambiguïté. Pour trouver L, on emploie souvent sans précaution suffisante la remarque suivante :

Le coefficient d'induction propre peut être considéré comme la limite vers laquelle tend le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines quand elles se rapprochent indéfiniment, ce qui est exact ; et on passe à la limite sur la formule de M, or M est toujours calculé en supposant que les bobines sont extérieures l'une à l'autre ; et ne permet pas de supposer qu'elles se pénètrent ; de sorte qu'en faisant $R = r$ dans M, le coefficient d'induction propre qu'on en déduit est faux.

237. Bobines minces. — Revenons à ces coefficients et prenons le cas où l'épaisseur est petite ; dans ce cas on peut parler sans ambiguité d'un rayon moyen r_m. Pour une bobine de longueur h le coefficient d'induction propre est sensiblement

$$L = \left\{ 2\pi\, n\, r_m (r_2 - r_1) \right\}^2 h.$$

Or la quantité entre parenthèses représente la longueur du fil embobiné par unité de hauteur : si λ est la longueur totale du fil sur la hauteur h, ce coefficient pourra s'écrire

$$L = \frac{\lambda^2}{h}.$$

Ce résultat est d'autant plus précis que le rapport $\frac{h}{r_m}$ est plus grand. De même, on obtient pour le coefficient d'induction mutuelle de deux bobines de même longueur axiale très grande H, dont la bobine extérieure a pour rayon moyen R_m, pour longueur de fil Λ, et la bobine intérieure a pour rayon moyen r_m, et pour longueur de fil λ,

$$M = \frac{\Lambda \lambda}{H} \frac{r_m}{R_m}.$$

238. Bobines sphériques. — En coordonnées sphériques r, θ, φ, l'équation de chacune des trois composantes F_1, F_2, F_3 suivant Ox, Oy, Oz, devient

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \theta} = -4\pi j.$$

Supposons que le courant soit circulaire autour de l'axe polaire, et que sa densité soit proportionnelle à sin θ et fonction quelconque de r, mais non de φ.

$$\begin{cases} j_1 = g \sin \theta . \cos \varphi, \\ j_2 = - g \sin \theta . \sin \varphi, \\ j_3 = o. \end{cases}$$

Les trois équations en F peuvent alors être réduites à une seule, en adoptant la même répartition

$$F_1 = G \sin \theta \cos \varphi,$$
$$F_2 = - G \sin \theta \sin \varphi,$$
$$F_3 = o$$

qui donne un potentiel G sin θ au point r, θ, φ.

G ne dépendant plus que de r est déterminé par l'équation

$$\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial G}{\partial r} - \frac{2}{r^2} G = - 4\pi g.$$

Dans l'espace isolant intérieur à une sphère de rayon r_1, l'intégrale est

$$G_0 = a r.$$

Dans l'intervalle conducteur entre deux sphères de rayons r_1 et r_2, où le courant g, est connu, l'intégrale continue avec la précédente est

$$G_1 = ar + \frac{4\pi}{3r^2} \int_{r_1}^{r} g r^3 dr - \frac{4\pi r}{3} \int_{r_1}^{r} g \, dr$$

et si g est constante, comme nous le supposerons dans la suite,

$$G_1 = ar + g \frac{4\pi}{3r^2} \frac{r^4 - r_1^4}{4} - g \frac{4\pi}{3} r (r - r_1).$$

Enfin dans l'espace isolant extérieur

$$G_2 = \frac{b}{r^2}.$$

Les conditions de continuité de G et de $\frac{\partial G}{\partial r}$ à travers les sphères r_1 et r_2 donnent

$$a = \frac{4\pi}{3}(r_2 - r_1)g$$

$$b = \frac{\pi}{3}(r_2^4 - r_1^4)g.$$

D'où finalement

$$G_0 = \frac{4\pi}{3}(r_2 - r_1)rg$$

$$G_1 = -\frac{4\pi}{3}\left(\frac{r_1^4}{4r^2} + \frac{3}{4}r^2 - r_2 r\right)g$$

$$G_2 = \frac{4\pi}{3}\frac{r_2^4 - r_1^4}{4r^2}g.$$

239. — Cette distribution de densités de courant est réalisable en embobinant entre les deux sphères un fil (de grosseur variable avec θ, s'il doit remplir exactement tout l'intervalle) parcouru par un courant uniforme, dont le nombre de tours n à travers un centimètre carré de section méridienne est proportionnel à sin θ :

$$n = N \sin\theta.$$

D'où

$$ni = Ni \sin\theta$$

$$g = Ni.$$

Cet enroulement met un nombre de tours constant dans chaque tranche d'épaisseur 1 comptée suivant l'axe polaire ; c'est l'enroulement connu de la bobine sphérique à champ magnétique intérieur constant ; mais dans ce cas il ne remplit pas tout l'espace compris entre les deux sphères.

Comme l'enroulement se fait nécessairement avec un fil de diamètre constant, nous supposons pour la suite que le fil laisse des interstices de plus en plus grands en approchant des pôles ; il est évident que les conclusions ne seront compatibles qu'avec de petites épaisseurs $r_2 - r_1$.

On obtiendra la force électromotrice totale par l'intégrale

$$E = -\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\pi}\int_{r_1}^{r_2} G \sin\theta . 2\pi r \sin\theta . N \sin\theta . r dr d\theta$$

dont l'élément est le produit de trois facteurs : le potentiel par unité de longueur du fil, $G \sin\theta$; la longueur d'un tour de fil $2\pi r \sin\theta$, et le nombre de tours de fil de l'élément de surface correspondant, $N \sin\theta \, r dr d\theta$.

Effectuons les quadratures, il vient

$$E = -N\frac{\partial i}{\partial t} . \frac{4}{3} . 2\pi . \frac{4\pi}{3} N\left[\frac{r_2^5}{10} - \frac{r_2 r_1^4}{2} + \frac{2 r_1^5}{5}\right] = -L\frac{\partial i}{\partial t}$$

en posant

$$L = 16\left[\frac{\pi}{3} N (r_2 - r_1)\right]^2 \frac{r_2^3 + 2r_1 r_2^2 + 3r_1^2 r_2 + 4r_1^3}{5}.$$

Le nombre total **N** de tours de fil est $N(r_2^2 - r_1^2)$.

La longueur totale du fil est

$$\lambda = \pi N \frac{r_2^3 - r_1^3}{3} = \pi N \frac{r_2 - r_1}{3}(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2).$$

On a donc

$$L = \frac{16}{5}\lambda^2 \frac{r_2^3 + 2r_1 r_2^2 + 3r_1^2 r_2 + 4r_1^3}{(r_2^2 + r_1 r_2 + r_1^2)^2}$$

$$= \frac{16\pi^2}{45} \mathbf{N} \frac{r_2^3 + 2r_1 r_2^2 + 3r_1^2 r_2 + 4r_1^3}{(r_2 + r_1)^2}$$

ce qui, dans le cas d'une épaisseur très petite, se réduit à

$$L = \frac{32}{9}\frac{\lambda^2}{r_m} = \frac{8}{9}\pi^2 N^2 \tau_m$$

en désignant par r_m et τ_m, deux rayons moyens, dont l'expression analytique est un peu différente.

240. Deux bobines sphériques concentriques. — Notant par un accent la quantité g' qui définit la densité de courant dans la

sphère extérieure, de rayons r_1', r_2', on a, dans les cinq domaines o, 2, 4 isolants, 1, 3, conducteurs, par simple addition des termes qui proviennent des deux sphères :

$$G_0 = \frac{4\pi}{3}(r_2 - r_1)g + \frac{4\pi}{3}(r_2' - r_1')g',$$

$$G_1 = -\frac{4\pi}{3}\left(\frac{r_1^4}{4r^2} + \frac{3}{4}r^2 - r_2 r\right)g + \frac{4\pi}{3}(r_2' - r_1')g',$$

$$G_2 = \frac{4\pi}{3}\frac{r_2^4 - r_1^4}{4r^2}g + \frac{4\pi}{3}(r_2' - r_1')g',$$

$$G_3 = \frac{4\pi}{3}\frac{r_2^4 - r_1^4}{4r^2}g - \frac{4\pi}{3}\left(\frac{r_1'^4}{4r^2} + \frac{3}{4}r^2 - r_2' r\right)g',$$

$$G_4 = \frac{4\pi}{3}\frac{r_2^4 - r_1^4}{4r^2}g + \frac{4\pi}{3}\frac{r_2'^4 - r_1'^4}{4r^2}g'.$$

Posant

$$g' = N'i'$$

nous obtenons facilement le coefficient d'induction mutuelle des deux bobines,

$$M = \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{4\pi}{3}(r_2' - r_1')N' \sin\theta . 2\pi r \sin\theta . N \sin\theta . r dr d\theta$$

ou

$$M = \frac{4\pi}{3}(r_2' - r_1')N' . \frac{8\pi}{3}\frac{r_2^3 - r_1^3}{3}N$$

ou en appelant **N'** le nombre total de tours de la bobine extérieure, et λ la longueur de fil enroulé sur la bobine intérieure

$$M = \frac{32\pi}{9}\frac{N'}{r_1' + r_2'}\lambda.$$

formule exacte, quelles que soient les épaisseurs des deux sphères, pourvu que l'enroulement soit conforme à la théorie [$n = N \sin\theta$].

La simplicité de ces formules exactes pour L et M montre qu'il y aurait avantage à construire les étalons sous cette forme sphérique ; l'enroulement théorique est facile à réaliser sous faible épaisseur.

CHAPITRE VI

DISTRIBUTION SPONTANÉE DU COURANT

241. — Au lieu de nous donner la distribution de j dans l'espace donnons nous la loi de F dans le temps :

Soit un conducteur plan parcouru par un courant dans le sens perpendiculaire au plan de la figure, et compris entre deux isolants. On a toujours

$$\Delta F = -4\pi j.$$

La force électromotrice résultant de l'induction est

$$-\frac{\partial F}{\partial t};$$

nous supposerons qu'il n'y a pas d'autre force électromotrice.

Alors

$$j = -k\frac{\partial F}{\partial t}$$

et par suite

$$\Delta F = 4\pi k \frac{\partial F}{\partial t}. \qquad (1)$$

Fig. 40

Remarquons que nous n'avons pas ici à nous préoccuper de l'isolant, car la force électromotrice étant parallèle à la surface de séparation, il n'y a pas de charges superficielles.

F ne dépend que de x, de sorte que l'équation (22) se réduit à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 4\pi k \frac{\partial F}{\partial t}. \qquad (2)$$

242. — Supposons d'abord que la décroissance se fait sans oscillations. F est donné par une exponentielle décroissante de la forme

$$F = Y e^{-\theta t}$$

on devra avoir

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -4\pi k\theta Y.$$

La solution est de la forme

$$F = \left(A \sin x \sqrt{4\pi k\theta} + B \cos x \sqrt{4\pi k\theta}\right) e^{-\theta t}.$$

Il n'y a pas de facteur exponentiel en x; il n'y a par conséquent pas de localisation superficielle du courant dans le conducteur; la force électrique est parallèle à la surface du conducteur, quelle que soit la rapidité de la variation dans le temps.

A l'extérieur, — (dans la théorie, que nous développons actuellement, et pratiquement lorsque la variation n'est pas trop rapide) l'équation est

$$\Delta F = o$$

dans l'isolant, ce qui donne comme solution, à cause de la continuité de F et de sa dérivée normale, à la surface de séparation $x = o$,

$$F = \left[B + \sqrt{4\pi k\theta}\, A x\right] e^{-\theta t}$$

puisque F ne peut dépendre que de x et de t.

On éviterait l'accroissement indéfini de F et de $\frac{\partial F}{\partial t}$ avec la distance x au plan limite, en supposant A nul, ce qui mettrait le maximum de la force électromotrice et du courant dans le plan $x = o$ et dans les plans $x = -\pi, -2\pi, -3\pi$, etc. Mais ce serait une solution illusoire de la difficulté, car elle reparaîtrait pour la seconde face d'une lame conductrice dont l'épaisseur ne soit pas un multiple de $\sqrt{\frac{\pi}{4k\theta}}$.

Les données du problème, avec l'extension indéfinie de la lame

dans les deux sens, laissant le courant ouvert, ne nous permettent pas d'achever la détermination : ce qui se passe à l'infini reste encore susceptible de conventions indépendantes.

243. — Considérons maintenant le cas où F est périodique, et prenons

$$F = Xe^{i\frac{2\pi t}{T}}$$

l'équation devient

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = \frac{8\pi^2 k}{T}\, iX$$

dont l'intégrale

$$X = (A + Bi)\, e^{\pm 2\pi x\sqrt{\frac{2ki}{T}}}$$

$$= (A + Bi)\, e^{\pm \pi x\sqrt{\frac{2k}{T}}(1+i) + i\frac{2\pi t}{T}}$$

donne en prenant les termes réels

$$F = \left\{ \begin{aligned} & Ae^{+\pi x\sqrt{\frac{2k}{T}}} \cos\left(\pi x\sqrt{\frac{2k}{T}} + \frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) \\ & + Be^{-\pi x\sqrt{\frac{2k}{T}}} \cos\left(\pi x\sqrt{\frac{2k}{T}} - \frac{2\pi t}{T} + \psi\right). \end{aligned} \right.$$

L'impossibilité d'un *courant* indéfiniment croissant avec la distance, nous oblige à ne prendre que les termes de la seconde ligne si le conducteur s'étend indéfiniment du côté des x positifs. Cela, indépendamment de toute considération du champ extérieur qui conduirait aux mêmes difficultés lointaines dans l'espace, que le cas précédent. Le courant périodique se localise donc au voisinage de la surface du conducteur; mais la force électrique est encore parallèle à la surface du conducteur, quelque courte que soit la période T.

244. — La conclusion apparaîtra avec plus de force encore si nous considérons une plaque d'épaisseur limitée $2h$, de part et d'autre du

plan $x = o$. Dans ce cas, si le champ lointain et inconnu ne s'y oppose pas, la distribution doit être symétrique par rapport au plan médian, ce qui donne

$$F = \cos\frac{2\pi t}{T} \times \left\{ \begin{array}{l} A\left(e^{+\pi x\sqrt{\frac{2k}{T}}} + e^{-\pi x\sqrt{\frac{2k}{T}}}\right)\cos \pi x\sqrt{\frac{2k}{T}} \\ + B\left(e^{+\pi x\sqrt{\frac{2k}{T}}} - e^{-\pi x\sqrt{\frac{2k}{T}}}\right)\sin \pi x\sqrt{\frac{2k}{T}} \end{array} \right.$$

et dès que la période T est un peu courte eu égard à l'épaisseur, l'exposant à la surface

$$\pi h\sqrt{\frac{2k}{T}},$$

rend les parenthèses énormes par rapport à leur valeur au milieu.

Ex. : Cuivre $k = \frac{1}{1\,600}$ (C. G. S.) T; $= \frac{1}{800}^{s}$; $h = 1^{cm}$;

les parenthèses valent $\pm$ 23 environ, à la surface : au milieu, leurs valeurs sont 1 et o.

245. — Le cylindre indéfini conduit à des conclusions analogues. Dans le cylindre conducteur, l'équation est

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = 4\pi k\frac{\partial F}{\partial t}$$

et (toujours dans l'état actuel de notre théorie) elle se réduit à

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} = o.$$

dans l'isolant.

1° Le courant décroît exponentiellement.

$$F = Re^{-\theta t},$$

d'où

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial R}{\partial r} + 4\pi k\theta R = o.$$

dont l'intégrale finie à l'origine est (L. II. Ch. V)

$$R = J_0\left(r\sqrt{4\pi k\theta}\right).$$

L'allure générale de la fonction de Bessel J_0, est alternante, maximum pour $r = o$, *au centre du fil*; en prenant cette valeur centrale pour unité, les autres maximum de plus en plus rapprochés de la surface sont de plus en plus petits ; mais leur décroissance se ralentit de plus en plus à mesure qu'on s'éloigne de l'axe (fig. 12, p. 96). Le 4[e] maximum est 0,22 ; le 16[e] 0,11 ; le 50[e] 0,063.

Le premier changement de signe se produit pour la valeur 2,40 ; le second pour 5,52, le 3[e] pour 8,65, le 4[e] pour 11,79, etc. Suivant la rapidité de chute de la force électromotrice, et le diamètre du fil, celui-ci peut donc être parcouru à ses différentes profondeurs par des courants alternativement de sens contraire ; le courant superficiel peut d'ailleurs être de même sens que le courant total, ou de sens opposé.

Ex. : Cuivre $k = \frac{1}{1600}$. Soit $\theta = \frac{400}{\pi}$:

R < $2^{cm},40$ Un seul sens de courant.
R < 5,52 Zône extérieure inverse de la zône centrale.
R < 8,65 Zône extérieure de même sens que la zône centrale, avec une zône intermédiaire opposée.

246. — L'intérieur du conducteur étant tout entier à distance finie, la répartition du courant y est déterminée indépendamment du champ extérieur. Celui-ci, (dans les conditions de notre théorie) est donné par

$$F = \left(C \log\left(\frac{r}{R}\right) + D\right) e^{-\theta t}$$

avec

$$D = J_0\left(R\sqrt{4\pi R\theta}\right)$$

et

$$C = R\left(\frac{\partial}{\partial r} J_0\right)_R$$

Même difficulté à l'infini que pour la lame plane.

247. — Le cas où la force électromotrice est périodique a fait l'objet d'études numériques approfondies à cause de son importance industrielle, et il est bien connu. Remplaçant

$$-\theta \quad \text{par} \quad \frac{2\pi}{T}i$$

nous obtenons pour la solution

$$R = J_0\left(r\sqrt{-\frac{8\pi^2 ki}{T}}\right) = X + iY.$$

Les deux fonctions X, Y de la variable

$$x = 2\pi r\sqrt{\frac{2k}{T}}$$

ont été étudiées et calculées numériquement par les soins de

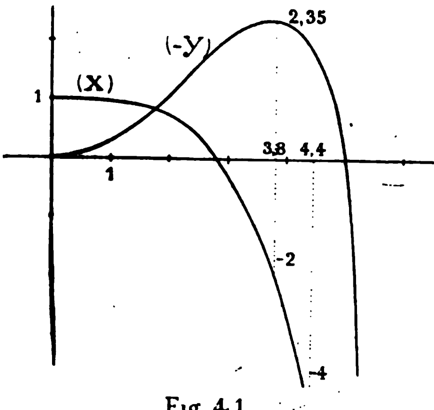


Fig 41

l'Association Britannique. Toutes deux croissent extrêmement vite en valeur absolue avec x, après avoir changé de signe une seule fois.

La figure 41 indique leur allure.

On a alors pour partie réelle

$$F = X \cos \frac{2\pi t}{T} - Y \sin \frac{2\pi t}{T}$$

et l'accroissement extrêmement rapide de X et Y en approchant de la surface, dès que la variable $2\pi r \sqrt{\frac{2k}{T}}$ dépasse 4, montre que la répartition du courant est alors exclusivement superficielle.

248. — Ces exemples suffisent à prouver combien est erroné le calcul des coefficients d'induction dans le cas des courants à variations très rapides, si on suppose le courant inducteur uniformément réparti dans la section du fil. L'erreur déjà grande pour un courant périodique dans le temps, qui se localise à la surface du conducteur, est bien évidemment plus grande encore pour un courant à décroissance exponentielle, qui se stratifie en zônes opposées dans la profondeur du fil. Il est, dans ce cas, impossible de parler d'un coefficient de self induction déterminé, ou même d'un coefficient limité, pour une décroissance exponentielle rapide du courant dans un fil un peu gros.

Ce sujet mérite une étude approfondie, que nous aborderons lorsque nous serons en possession des équations correctes (Maxwell-Hertz) du champ extérieur.

CHAPITRE VII

PROPAGATION AVEC CAPACITÉ ET INDUCTION
MÉMOIRE DE KIRCHHOFF

249. — Les caractères de la propagation de l'électricité dans un fil doué de capacité, mais sans induction, sont connus dans leurs traits généraux par l'étude approfondie des câbles, et par l'analogie avec la chaleur : toute variation se fait sentir instantanément à toute distance, mais infiniment peu à distance infinie ; il n'y a pas de vitesse de propagation indépendante de la loi de variation du potentiel ; mais à chaque variation périodique correspond une vitesse de propagation particulière des nœuds et des ventres ; une vitesse du train d'ondes, et un amortissement ou une absorption déterminées. Le conducteur doué de capacité se comporte comme doué de dispersion et de pouvoir absorbant, variables avec sa forme.

Les caractères des variations d'intensité dans le temps, par induction sans capacité, sont également bien connus, depuis Faraday, Lenz, Neumann, Thomson, Helmholz.

Mais les caractères de la propagation dans les fils doués de capacité et d'induction, ont été méconnus, ou pour mieux dire inconnus, des physiciens, à peu près jusqu'aux découvertes retentissantes de Hertz, bien qu'ils eussent été établis par Kirchhoff dans un remarquable mémoire de 1857 [1]. Dans ce mémoire, Kirchhoff montre que toute perturbation se propage le long du fil avec une vitesse finie, quoique très grande, égale à la vitesse « rapport des unités électrostatique et

[1] Uber die Bewegung der Electricität in Drähten. — *P. A.*, t. 100. — *Abh.* p. 131.

électromagnétique », c'est-à-dire à la vitesse de la lumière. Comment un résultat si important, conséquence de lois bien établies, a-t-il pu rester pratiquement ignoré des physiciens, ne leur suggérant aucune expérience, pendant plus de trente ans ? C'est que Kirchhoff a malheureusement étudié les *fils* et non pas les *câbles* ; ni la notion de capacité par unité de longueur, ni la notion de coefficient d'induction propre par unité de longueur, indispensables à son raisonnement ultérieur, n'ont paru être établies, ou seulement rendues vraisemblables par les considérations du début.

250. — Kirchhoff suppose le fil fin, très long, très peu courbé, de manière qu'on puisse le décomposer en *éléments* de longueur sensiblement rectilignes, quoique très longs par rapport au diamètre. C'est le mode de décomposition usuel quand on s'occupe des propriétés des fils, dont c'est, pour ainsi dire, la définition. Dans un tel élément, on suppose que le potentiel varie linéairement, que la densité superficielle est uniforme, que la force électromotrice induite est uniforme ; on suppose aussi dès le début que les densités internes jouent un rôle négligeable par rapport aux densités superficielles.

Soit donc un élément du fil de longueur 2λ, de diamètre 2α le long duquel la densité électrique par unité de longueur de l'élément est e ; au centre de la section droite médiane de cet élément le potentiel dû à la densité superficielle uniforme $e : 2\pi\alpha$, que donne une quadrature facile, est exactement

$$2e \log \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}}{\alpha}$$

et approximativement, puisque λ est supposé très grand par rapport à α,

$$2e \log \frac{2\lambda}{\alpha}.$$

Au delà de la distance λ, la charge $e'ds'$ que porte l'élément ds' du fil conducteur peut être regardée comme placée sur l'axe géométrique

du fil ; appelant r la distance de l'élément ds' au milieu de l'élément 2λ, le potentiel total en ce point est

$$V = 2e \log \frac{2\lambda}{\alpha} + \int \frac{e' ds'}{r},$$

en excluant de l'intégration l'élément 2λ.

251. — Pour la force électromotrice induite, Kirchhoff adopte la forme élémentaire de Weber

$$-\frac{2}{\Omega^2} \cos\theta \cos\theta' . \frac{ds'}{r} \frac{\partial i'}{\partial t}$$

Ω est la vitesse de la lumière ([1]).

La force électromotrice le long d'un filet infiniment étroit pris dans la section droite de l'élément 2λ se présente sous forme d'une intégrale quadruple, étendue, 1° à toute la longueur 2λ, 2° à tous les éléments de volume d'une section éloignée ; Kirchhoff montre que, à cause de l'éloignement des autres parties du fil, la partie de la force électromotrice qui dépend de la position du filet dans la section droite est négligeable. C'est ce qui résulte des exemples traités aux Chapitres précédents par une toute autre méthode. Admettant alors que le courant reste uniformément distribué dans chaque section droite pendant tout l'état variable, on obtient pour la force électromotrice au centre de la section médiane de l'élément 2λ, due à cet élément,

$$-\frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial i}{\partial t} \frac{1}{\pi \alpha^2} \int_{-\lambda}^{+\lambda} \int_0^{\alpha} \frac{x^2 dx . 2\pi\rho d\rho}{\left(\sqrt{x^2 + \rho^2}\right)^3}$$

car on a ici

$$\cos\theta = \cos\theta' = \frac{x}{r}$$

([1]) J'ai appelé Ω, conformément aux notations de tout l'ouvrage, ce que Weber et Kirchhoff appelaient $c : \sqrt{2}$. De même, j'ai continué à appeler i le courant total ; tandis que Weber et Kirchhoff appellent $2i$ ce courant total, composé par moitié du courant de fluide positif dans un sens, et négatif dans l'autre.

et

$$r = \sqrt{x^2 + \rho^2}.$$

Le résultat de la quadrature est rigoureusement

$$-\frac{2}{\Omega^2}\frac{\partial i}{\partial t}\left(\frac{\lambda^2 - \lambda\sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}}{\alpha^2} + \log\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \alpha^2}}{\alpha}\right);$$

il se réduit à

$$-\frac{2}{\Omega^2}\frac{\partial i}{\partial t}\log\frac{2\lambda}{\alpha}$$

en négligeant $\frac{\alpha}{\lambda}$ devant l'unité, et en outre, l'unité devant $\log\frac{2\lambda}{\alpha}$.

On obtient alors pour la force électromotrice au centre de l'élément 2λ, due à tout le circuit immobile

$$(2) \quad -\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[2i\log\frac{2\lambda}{\alpha} + \int\frac{i'ds'\cos\theta\cos\theta'}{r}\right]$$

en excluant de l'intégrale comme précédemment le même élément 2λ.

252. — La loi d'Ohm nous donne alors en appelant k la conductibilité spécifique du fil :

$$(3) \qquad i = k.\pi\alpha^2.\left[-\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right]$$

et la conservation de l'électricité donne

$$(4) \qquad \frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Jusqu'ici les approximations ne soulèvent aucune objection ; il faut seulement les compléter par une remarque au sujet de l'équation (2). Si au lieu d'adopter la loi élémentaire d'induction de Weber, en $\cos\theta\cos\theta'$, on avait adopté la loi en $\cos\varepsilon$ de Neumann, équiva-

lente pour un circuit fermé, mais non pour le cas actuel de courant variable, on aurait eu pour l'élément 2λ

$$-\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial i}{\partial t}\frac{1}{\pi\alpha^2}\int_{-\lambda}^{+\lambda}\int_{o}^{\alpha}\frac{dx\ 2\pi\rho\ d\rho}{\sqrt{x^2+\rho^2}}$$

qui donne rigoureusement

$$-\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial i}{\partial t}\cdot 2\left[\frac{\lambda\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}-\lambda^2}{\alpha^2}+\log\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+\alpha^2}}{\alpha}\right]$$

et approximativement, dans les mêmes conditions que plus haut

$$-\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial i}{\partial t}\,2\log\frac{\lambda}{\alpha}.$$

Il suffira donc, pour passer d'une loi élémentaire à l'autre, de remplacer *cos* θ *cos* θ' par *cos* ε, dans l'intégrale extérieure à l'élément 2λ.

Remarquons enfin que déjà l'hypothèse de l'isotropie des charges superficielles et de l'uniformité de distribution du courant dans la section exige que toutes les parties du circuit soient à grande distance l'une de l'autre, et exclut de la théorie actuelle tout circuit enroulé en spires serrées. Excluons donc les spires, de telle sorte qu'aucun couple de deux points séparés par un arc fini ne se trouve à petite distance, cela va permettre une nouvelle simplification des équations 1, 2.

253. — Nous voici arrivés au point délicat ; traduisons donc [1] :

« Soit A la position de l'élément *ds* (2λ) ; soient B, C, deux points pris sur le fil à distance *finie* de part et d'autre de A ; l'intégrale

$$\int\frac{e'ds'}{r}$$

étendue à tout le fil, à l'exception de BAC, est une grandeur

(1) *Abh.* — p. 140-141.

finie, par conséquent infiniment petite par rapport à $2e \log \frac{2\lambda}{\alpha}$; on doit donc, dans l'équation (1), étendre cette intégrale au segment BAC seulement, en excluant l'élément 2λ. »

Comme, dans ce segment, e' tend vers e, l'intégrale a pour valeur

$$e \log \frac{AB}{\lambda} + e \log \frac{AC}{\lambda}$$

en négligeant seulement des quantités finies, provenant de la petite différence $e' - e$, et de la courbure du segment.

« Le choix des longueurs AB, AC est arbitraire ; il faut seulement qu'elles soient finies par rapport à la longueur totale du fil : on les prendra toutes deux égales à la moitié de la longueur totale l du fil ; l'équation (1) deviendra

$$V = 2e \log \frac{2\lambda}{\alpha} + 2e \log \frac{l}{2\lambda}$$

ou

$$V = 2e \log \frac{l}{\alpha}.$$

« Des considérations du même genre donnent à l'équation (2) une forme semblable

$$w = i \log \frac{l}{\alpha}. » [1]$$

254. — On comprend que ces quelques mots aient soulevé des objections. Au fond, le segment AC doit être rectiligne comme l'élément 2λ ; la charge et le courant i doivent y être uniformes sensiblement comme dans l'élément 2λ ; absolument rien ne permet de lui donner une longueur finie, comparable à la longueur totale du fil, si la charge et le courant y éprouvent d'un bout à l'autre des variations relatives finies. Quand, donc, on voit étudier, quelques pages plus loin, la propagation des *discontinuités*, sur une équation ainsi

(1) Les notations ne sont pas identiques à celles de Kirchhoff. Voir ci-dessus.

formée, il est impossible d'admettre que les résultats énoncés soient une conséquence, même grossièrement approchée, des principes adoptés au début du mémoire.

255. — Passons outre, pour ne pas interrompre l'analyse du Mémoire de Kirchhoff, en nous réservant de revenir sur cette discussion.

Les quatre équations sont ainsi réduites à la forme simple

$$V = 2e\gamma$$

$$w = 2i\gamma$$

$$i = -\frac{l}{r}\left(\frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

en posant

$$\gamma = \log\frac{l}{\alpha} \qquad r = \frac{l}{k\pi\alpha^2}.$$

L'élimination de trois des quantités, e, i, w, par exemple, se fait sans difficulté et donne pour V l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{r}{2\gamma l}\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}$$

ou

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 2h\frac{\partial V}{\partial t} = \Omega^2\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}.$$

avec

$$2h = \frac{r\Omega^2}{2\gamma l}.$$

256. — Kirchhoff commence par remarquer que pour les fils métalliques des longueurs usuelles dans les laboratoires, le second terme est négligeable. Prenant pour exemple l'étalon de résistance étudié par Jacobi et par Weber, il trouve pour le coefficient $\frac{2h}{\Omega^2}$ un nombre de l'ordre de 10^{-3} : Ωl quand on mesure le temps en secondes.

Si donc on néglige tout à fait ce terme, le potentiel V se propage sensiblement avec la vitesse de la lumière le Ω long du fil, sans

amortissement. En particulier, une discontinuité, comme celle qu'on produit en introduisant ou supprimant brusquement une pile, circule indéfiniment le long du fil avec la vitesse Ω (en admettant qu'il y ait un moyen de rendre insensible la durée d'introduction ou de suppression de la pile, par comparaison avec la durée de parcours total du circuit avec la vitesse de la lumière).

257. — Cette première approximation, qui nous montre qu'un circuit de quelques kilomètres peut être parcouru un grand nombre de fois par l'onde électrique sans affaiblissement sensible, ne suffit pas; car plusieurs milliers de tours ne font encore que quelques centièmes de seconde. L'amortissement le plus minime, qui ne réagit pas sur la vitesse de propagation, suffit à tout éteindre en un temps à peine appréciable. Poussons donc l'approximation plus loin.

Une solution simple est

$$V = Ce^{-\lambda t + ins}$$

avec

$$\lambda^2 - 2h\lambda + \Omega^2 n^2 = 0.$$

D'où

$$\lambda = h \pm \sqrt{h^2 - \Omega^2 n^2}$$

et approximativement

$$\lambda = h \pm in\Omega$$

en négligeant $\frac{h^2}{\Omega^2 n^2}$.

La solution simple, mise sous forme réelle, est alors

$$V = Ae^{-ht} \cos n\,(s \pm \Omega t).$$

dont l'amortissement est indépendant de la *pulsation* n [1].

258. — On peut donc ajouter des états périodiques d'amplitude et

[1] Le rôle industriel de plus en plus important des courants alternatifs a conduit à des dénominations conventionnelles acceptées des électriciens. La *période* étant T, la *fréquence* est $\frac{1}{T}$, et la *pulsation* est $\frac{2\pi}{T}$.

de période quelconque, et prendre comme solution générale approximative

$$V = e^{-ht}\left[f_1(s - \Omega t) + f_2(s + \Omega t)\right]$$

f_1 et f_2 étant deux fonctions arbitraires.

Les deux ondes se propagent en sens inverse, avec la même vitesse Ω, en conservant leur forme, mais avec un amortissement commun à toute l'onde.

Des équations 1, 2, 3, 4 simplifiées on tire facilement pour i l'expression

$$i = \begin{cases} \dfrac{\Omega}{2\gamma} e^{-ht}\left[f_1(s - \Omega t) - f_2(s + \Omega t)\right] \\ + \dfrac{h}{2\gamma} e^{-ht} \displaystyle\int \left[f_1(s - \Omega t) + f_2(s + \Omega t)\right] ds \end{cases}$$

dont la seconde ligne est négligeable à cause du facteur h.

259. Réflexion aux bouts du fil. — Dans un circuit non fermé, si l'extrémité du fil $s = o$ est isolée, l'intensité y est nulle : on a donc

$$f_1(-\Omega t) = f_2(+\Omega t)$$

l'intensité s'y réfléchit en changeant de signe, et le potentiel sans changer de signe.

Si l'extrémité est en communication avec le sol, ou pratiquement avec une capacité telle que ses variations de potentiel soient négligeables, on a au contraire

$$f_1(-\Omega t) + f_2(+\Omega t) = o,$$

c'est le potentiel qui change de signe en se réfléchissant et l'intensité qui n'en change pas.

260. Examinons, à titre d'illustration, la propagation des discontinuités.

1° Circuit fermé, de longueur l. Etat initial, courant permanent :

$$V = -Es \qquad o < s < l$$

$$i = \frac{E}{R}.$$

On supprime instantanément la pile. Discutant directement, sans passer comme Kirchhoff, par l'intermédiaire de la série de Fourier de période l ; nous avons d'après l'état initial

$$o < s < l$$

$$f_1(s) + f_2(s) = -Es$$

$$\frac{\Omega}{2\gamma}\left[f_1(s) - f_2(s)\right] = \frac{E}{R}$$

d'où

$$f_1(s) = \frac{E}{2}\left(-s + \frac{2\gamma}{R\Omega}\right)$$

$$f_2(s) = \frac{E}{2}\left(-s - \frac{2\gamma}{R\Omega}\right)$$

et par conséquent

$$f_1(s - \Omega t) = \frac{E}{2}\left(-s + \Omega t + \frac{2\gamma}{R\Omega}\right) \qquad o < s - \Omega t < l$$

$$f_2(s + \Omega t) = \frac{E}{2}\left(-s - \Omega t - \frac{2\gamma}{R\Omega}\right) \qquad o < s + \Omega t < l.$$

Aussitôt que la pile est supprimée, le potentiel et l'intensité deviennent les mêmes aux deux bouts o, l du circuit, et l'on a, quelque soit t,

$$f_1(-\Omega t) + f_2(+\Omega t) = f_1(l - \Omega t) + f_2(l + \Omega t)$$

$$f_1(-\Omega t) - f_2(+\Omega t) = f_1(l - \Omega t) - f_2(l + \Omega t)$$

f_1 et f_2 ont donc séparément la période l, et sont complètement déterminés, puisqu'ils le sont déjà dans une période.

261. — Dans l'état initial, chacune de ces fonctions a une discontinuité $\frac{E}{2}$ à l'origine. Cette discontinuité $\frac{E}{2}$ se propage symétrique-

ment à droite et à gauche de l'origine, en s'atténuant dans le rapport e^{-ht}. Au demi-parcours, à l'époque $\frac{l}{2\Omega}$, les deux discontinuités se rencontrent et s'ajoutent un instant ; la discontinuité totale est à ce moment $Ee^{-\frac{hl}{2\Omega}}$.

Après un tour entier, elles se rencontrent de nouveau à l'origine, mais leur somme a encore diminué, elle n'est plus que $Ee^{-\frac{hl}{\Omega}}$; etc.

A un moment quelconque les discontinuités séparent le circuit en deux parties dans chacune desquelles le courant est constant, et le potentiel est linéaire en s ; mais l'une des parties est en avance d'une demie période sur l'autre.

Pendant la première période, par exemple, dans tout l'espace s, non atteint par la discontinuité,

$$\Omega t < s < l - \Omega t,$$

l'intensité est encore $\frac{E}{R}$, et le potentiel $-$ Es. Dans l'espace symétrique

$$o < s < \Omega t;$$

qui n'a encore été atteint que par une des ondes, on a

$$V = \frac{E}{2}\left[\left(-s - \frac{2\gamma}{R\Omega}\right) + \left(-s + \Omega t + \frac{2\gamma}{R\Omega}\right)e^{-ht}\right]$$

$$i = \frac{E}{2}\frac{\Omega}{2\gamma}\left[-\left(-s - \frac{2\gamma}{R\Omega}\right) + \left(-s + \Omega t + \frac{2\gamma}{R\Omega}\right)e^{-ht}\right]$$

262. — Sans entrer dans plus de détails à ce sujet, on suit bien la marche du phénomène en se représentant la progression inverse et l'affaissement simultané des deux droites horizontales, avec le saut brusque en marche d'escalier, pour le potentiel, et la progression des droites de même pente avec le ressaut en talus de rempart pour l'intensité.

Il n'est pas plus difficile de suivre les modifications progressives le long d'un fil télégraphique aux extrémités duquel se produisent des réflexions d'intensité sans changement de signe.

Sans insister davantage, on voit, dans les cas où nous pourrons justifier les simplifications aventureuses de Kirchhoff, comment

l'influence d'une faible capacité du fil modifie le phénomène de l'induction, qui cesse d'être rigoureusement simultané sur toute la longueur du fil, mais dont les discontinuités courent avec la vitesse de la lumière sur toute sa longueur, et s'entrecroisent s'il est fermé, en s'atténuant à chaque tour dans une proportion extrêmement petite.

Tel est le contenu, librement analysé, de ce mémoire, digne à coup sûr d'autant d'admiration que de critiques.

CHAPITRE VIII

PROPAGATION AVEC INDUCTION ET CAPACITÉ DISCUSSION

263. — Certaines parties du mémoire de Kirchhoff étant sujettes à caution, attachons-nous y spécialement.

Pour arriver à la forme simple d'équation aux dérivées partielles, (I), (n° 255) il faut que l'action tant inductive qu'électrostatique des parties lointaines d'un circuit sur chaque segment de quelque étendue soit négligeable. C'est ce qui arrive dans un cas déjà très étendu, celui d'un long circuit dont le fil d'aller et le fil de retour marchent parallèlement ; cas très important pour la pratique, car il correspond aux conditions d'établissement des lignes télégraphiques.

L'âme et l'armature dans un câble, le fil et le sol, ou mieux le fil et son symétrique par rapport au sol, dans une ligne télégraphique ordinaire, constituent ainsi un fil d'aller et un fil de retour parallèles, dont l'écart d est petit, et dont les segments en regard sont parcourus par des courants égaux et contraires, et ont des charges électriques égales et contraires.

264. — Alors, quel que soit l'état variable des deux fils, la force électrostatique en un point, due à un segment des deux fils, varie, à grande distance r, comme $d : r^3$, et la force électrique induite comme $d : r^2$; sur l'ensemble des deux éléments de fil parallèles, ces forces d'origine lointaine agissent dans le même sens absolu, et par conséquent en sens opposé par rapport aux courants d'aller et de retour ; leur action est donc de l'ordre de $d^2 : r^3$ et de $d^2 : r^2$.

Par conséquent, en excluant les boucles, et les enroulements, même assez lâches, de manière que la longueur d'un arc quelconque soit de même ordre que la distance r de ses extrémités, l'intégration étendue à tout le circuit sauf un tronçon 2λ donnera des résultats petits de l'ordre de $d^2 : \lambda^2$ et de $d^2 : \lambda$ au milieu de ce tronçon.

265. — On peut donc se borner à considérer les réactions mutuelles de ce tronçon, long par rapport à la distance d des fils d'aller et de retour, et sensiblement rectiligne.

Si la densité et l'intensité varient beaucoup d'un bout à l'autre du tronçon, le problème relatif à ces fils parallèles reste encore difficile. Mais ajoutons la condition que la densité et l'intensité sont sensiblement des fonctions linéaires de l'arc sur toute la longueur 2λ d'un tronçon quelconque, beaucoup plus grande que la distance d : le problème devient très simple.

En effet, si la répartition est uniforme, il y a une capacité par unité de longueur C, et un coefficient de self-induction L par unité de longueur; il en est de même si la variation est linéaire, parce que, les éléments symétriques jouant le même rôle dans les intégrales, leur somme est la même que pour la distribution uniforme égale à celle du point central.

266. — Cela étant, le courant est i dans le fil d'aller, et $-i$ dans le fil de retour, en face.

L'électrostatique donne

$$\frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{C}{\Omega^2}\frac{\partial V}{\partial t}$$

C étant la capacité géométrique ; et l'induction donne

$$-\frac{\partial V}{\partial s} = Ri + L\frac{\partial i}{\partial t}$$

d'où

(II) $$\frac{\partial^2 V}{\partial s^2} = \frac{CR}{\Omega^2}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{CL}{\Omega^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Cette fois l'équation II, de même forme générale que celle de

Kirchhoff, a des coefficients dont la signification et la grandeur n'ont rien d'indéterminé.

C'est sous cette forme, mais sans s'être embarrassé un instant d'établir l'existence de la capacité et de la self-induction par unité de longueur, que M. Heaviside a écrit à nouveau cette équation de propagation en 1876 (1), et a refait une discussion analogue à celle de Kirchhoff, qu'il cite d'ailleurs. Il s'en est occupé de nouveau, dans un long et important mémoire, paru en 1881 dans le journal (anglais) de la Société des Ingénieurs télégraphistes (2) : et a développé les formules d'intégration par la série de Fourrier, comme pour le câble sans-induction, non seulement pour le fil indéfini, mais pour le fil limité, soit isolé, soit relié au sol, directement ou par l'intermédiaire d'appareils présentant eux-mêmes de la résistance, de la capacité, de l'induction ; ce qui dans chaque cas modifie la loi des coefficients de la série (3).

267. — Cette équation a été étudiée au même point de vue par les ingénieurs télégraphistes français (4).

Au point de vue théorique, et sans hypothèse restrictive, au sujet de l'ordre de grandeur des coefficients, l'équation mise sous la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

en posant

$$y = \frac{R}{2L}\, t, \qquad x = \frac{R}{2\Omega}\sqrt{\frac{C}{L}}\cdot s$$

a été intégrée au moyen des fonctions de Bessel par M. H. Poin-

(1) On the Extrat-current. — *Ph. Mag.* 1876 et *Electr. Papers*. (Macmillan) I. p. 53, à partir, du § 14.

(2) *Electr. Papers*. t. I. p. 116. On induction between parallel wires ; à partir du n° 13 p. 129.

(3) M. Heaviside a traité la plupart des questions de principe, et à peu près toutes les applications possibles au moyen des séries de Fourier, des fonction. sphériques et des fonctions de Bessel, dans une prodigieuse série de mémoires à la fois condensés et touffus, qui ont heureusement été réunis en volumes sous le titre « *Electrical Papers* » (Macmillan) 1892.

(4) *Annales de télégraphie* Barbarat, 1888, — et pour l'ensemble des travaux Vaschy, *Traité d'électricité et de magnétisme* en deux volumes.

carré (¹), résultat que M. E. Picard a obtenu ensuite d'une manière très directe.

Cette forme réduite, est souvent désignée sous le non d' « équation des télégraphistes. »

268. — Contentons nous de réviser la discussion de Kirchhoff, en évaluant d'abord correctement l'ordre de grandeur des termes : dans la solution simple

$$V = A\, e^{-\lambda t + ins}$$

avec

$$\lambda^2 - \frac{R}{L}\lambda + \frac{\Omega^2}{CL} n^2 = o$$

ou

$$\lambda = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{4L^2}{R^2} - \frac{\Omega^2 n^2}{CL}};$$

Dans cette équation, la capacité par unité de longueur C, et la self-induction par unité de longueur L, sont des grandeurs géométriques, sans dimensions, dont le produit diffère peu de l'unité ; n est l'inverse d'une longueur comparable à la longueur totale du câble, ou à une de ses parties aliquotes. $\frac{\Omega^2 n^2}{CL}$ est donc l'inverse du carré d'un temps comparable au temps de parcours du câble par la lumière ; c'est $36,10^7$ pour une longueur d'onde de 100 kilomètres, $36,10^{11}$ pour une longueur d'onde d'un kilomètre.

269. — Pour deux fils parallèles, L est supérieur à 4, mais n'atteint pas 10, ce qui supposerait la distance égale à 10^4 fois le diamètre des fils. R est pour deux fils de cuivre de rayon a, $2\frac{1\,600}{\pi a^2}$ en CGS, soit 10^5 pour des fils de $0^{cm},2$ de diamètre, 10^3 pour une transmission de puissance de 2 centimètres de diamètre.

$\frac{R^2}{4L^2}$ est donc de l'ordre de 10^4 à 10^8.

(¹) *Les oscillations électriques.* — Leçons rédigées par M. Maurain, Carré et Naud, 1894.

Donc, pour des longueurs d'onde inférieures à quelques kilomètres, l'approximation de Kirchhoff est permise; l'onde qui en résulte s'amortit tout entière au même taux $\left(e^{-\frac{R}{2L}t}\right)$, *en conservant sa forme; ce résultat est d'autant plus exact que l'onde est plus courte; il s'applique rigoureusement aux discontinuités compatibles avec les hypothèses initiales sur lesquelles l'équation est fondée, c'est-à-dire aux discontinuités des dérivées secondes et au-delà, du potentiel* V.

La vitesse de propagation commune à toutes ces ondes et aux discontinuités est $\Omega : \sqrt{CL}$.

270. — L'approximation est d'autant moins bonne que les ondes sont plus longues et les fils plus fins; pour une onde de 100 kilomètres par exemple, et des fils de deux millimètres de diamètre, peu éloignés, les deux termes sous le radical $10^8 - 36,10^7$ sont tout à fait de même ordre.

A mesure que la longueur d'onde augmente, et se rapproche de 100 à 1 000 kilomètres, surtout avec des fils résistants peu écartés, la vitesse de propagation diminue de plus en plus, finit par s'annuler et l'état électrique cesse de se propager pour s'amortir sur place.

Pour une longueur d'onde infinie, on retrouve l'amortissement, sans aucune propagation, de la théorie de l'induction sans capacité.

Sans entreprendre une étude plus approfondie de l'équation des télégraphistes, nous voyons clairement que, dans un très long fil, toute perturbation peut être décomposée en trois parties :

La valeur moyenne, s'amortit sur place, sans se propager, au taux des courants sans capacité, $e^{-\frac{Rt}{L}}$; *les courtes irrégularités (moins d'un kilomètre) se propagent sans déformation, avec la vitesse* $\Omega : \sqrt{CL}$ *en s'amortissant deux fois moins vite; les irrégularités intermédiaires s'amortissent de même, mais se propageant moins vite, s'étalent en traînées de plus en plus longues qui finissent par ne plus se propager du tout et se confondre avec la valeur moyenne.*

271. — On peut facilement montrer, avec Hugoniot, que la discontinuité des dérivées secondes, le front de l'onde, comme on l'appelle, se propage rigoureusement avec la vitesse $\frac{\Omega}{\sqrt{\mathrm{CL}}}$.

Comme $\frac{\partial V}{\partial s}$ et $\frac{\partial V}{\partial t}$ sont continus au front de l'onde on a encore en ce point

$$\frac{\partial V}{\partial s} = o \qquad \frac{\partial V}{\partial t} = o.$$

Prenons la dérivée par rapport à t en remarquant qu'au front de l'onde s est fonction de t. On aura

$$\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t} + \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\frac{\partial s}{\partial t} = o$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t}\frac{\partial s}{\partial t} = o$$

d'où en éliminant $\frac{\partial^2 V}{\partial s \partial t}$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2.$$

Mais d'autre part puisque $\frac{\partial V}{\partial t}$ est nul au front de l'onde, l'équation générale se réduit en ce point à

$$\mathrm{CL}\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \Omega^2\,\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}.$$

Ces deux dernières équations nous donnent

$$\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 = \frac{\Omega^2}{\mathrm{CL}}.$$

La propagation du front de l'onde se fait donc avec la vitesse $\frac{\Omega}{\sqrt{\mathrm{CL}}}$.

Examinons maintenant dans quelle mesure la vitesse de propagation $\Omega : \sqrt{\mathrm{CL}}$ diffère de la vitesse de la lumière.

Les valeurs géométriques de C et de L ont un produit peu différent de l'unité.

Pour deux fils parallèles de rayons a_1 a_2 à distance d, on sait que l'on a

$$C = \frac{1}{2 \log \frac{d^2}{a_1 a_2}}$$

et nous avons trouvé en supposant la densité de courant uniforme

$$L = 2 \log \frac{d^2}{a_1 a_2} + 1$$

d'où

$$CL = 1 + C.$$

Pour une distance modérée des deux fils

$$d = 10 a_1 = 10 a_2,$$

$$C = \frac{1}{9,2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{CL}} = 0,95 \text{ environ.}$$

Dans la théorie actuelle la vitesse de propagation est inférieure d'environ $\frac{1}{20}$ à la vitesse de la lumière ; la différence serait moindre pour des fils plus écartés.

272. — Dans un câble, à fil creux, de rayon intérieur a et extérieur b dont l'armature a pour rayons interne a' et externe b' : on a

$$C = \frac{1}{2 \log \left(\frac{a'}{b}\right)},$$

et nous avons trouvé

$$L = 2 \log \frac{a'}{b} - \frac{1}{2} \frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2} - \frac{1}{2} \frac{b'^2 + a'^2}{b'^2 - a'^2} - 2 \frac{a^4}{(b^2 - a^2)^2} \log \frac{a}{b} - \frac{2b'^4}{(b'^2 - a'^2)^2} \log \frac{a'}{b'}.$$

Le produit CL peut-être très différent de l'unité. Prenons par exemple

$$a = 0 \qquad b = 0,1$$

$$a' = 0,5 \qquad b' = 1$$

$$C = \frac{1}{3,22}$$

$$L = +\, 3,22 - 0,5 - 0,8 + 2,46 = 4,38$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{CL}} = 0,86$$

l'écart est de $\frac{1}{7}$.

Dans le cas limite où les deux conducteurs seraient des tubes infiniment minces,

$$L = 2 \log \frac{a'}{b} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \log \frac{a'}{b} + \frac{1}{2},$$

comme on le voit en développant les logarithmes.

Même formule évidemment, si pour une raison quelconque les courants se localisaient d'eux-mêmes sur les surfaces des conducteurs en regard.

Conservons les mêmes valeurs de b et a' :

$$L = 3,22 + 0,5 = 3,75$$

$$\frac{1}{\sqrt{CL}} = 0,93$$

l'écart est réduit à $\frac{1}{14}$; mais il n'est pas annulé comme on le dit quelquefois.

273. — Pour que la vitesse de propagation dans les fils métalliques contigus et dans les câbles atteigne la vitesse de la lumière, il ne suffit donc pas que les courants se localisent exactement à la surface des conducteurs.

C'est une question sur laquelle il faudra revenir plus tard.

Notons seulement que si le milieu isolant est autre que le vide, il faut multiplier la capacité par le pouvoir inducteur spécifique K ; la vitesse de propagation est alors multipliée par $\sqrt{K}$. L'amortissement reste le même ; pour le changer, il faudrait que le milieu soit magnétique, ce qui multiplierait L par la perméabilité magnétique μ.

274. — Revenons maintenant au fil simple de Kirchhoff, et voyons s'il n'est pas possible d'obtenir quelque conclusion exacte.

Les 4 équations sont, en supposant l'élément sensiblement rectiligne 2λ très long par rapport à son rayon α :

$$(1) \quad V = 2e \log \frac{2\lambda}{\alpha} + \int_{+\lambda}^{l-\lambda} \frac{e' ds'}{r},$$

$$(2) \quad w = 2i \log \frac{2\lambda}{\alpha} + \int_{+\lambda}^{l-\lambda} \frac{i' ds' (\eta \cos\theta \cos\theta' + (1-\eta)\cos\varepsilon)}{r},$$

$$(3) \quad i = k\pi\alpha^2\left(-\frac{\partial V}{\partial s} - \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial w}{\partial t}\right),$$

$$(4) \quad \frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial e}{\partial t};$$

dans (2) on a remplacé $\cos\theta \cos\theta'$ par $\eta \cos\theta \cos\theta' + (1-\eta)\cos\varepsilon$, en appelant η un nombre quelconque, sans contrevenir en rien aux principes fournis par les courants fermés.

Entre ces 4 équations, on peut facilement éliminer e, V, w, et l'on obtient

$$\frac{\partial i}{\partial t} = k\pi\alpha^2 \left[\begin{array}{l} + 2\left(\frac{\partial^2 i}{\partial s^2} - \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\right)\log\frac{2\lambda}{\alpha} \\ + \int \frac{\partial i'}{\partial s'}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right) ds' \\ - \frac{1}{\Omega^2}\int \frac{\partial^2 i'}{\partial t^2}\frac{(\eta\cos\theta\cos\theta' + (1-\eta)\cos\varepsilon)}{r} ds' \end{array} \right]$$

La seule différentiation délicate est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{+\lambda}^{l-\lambda} \frac{e' ds'}{r} = \frac{e_{l-\lambda} - e_\lambda}{\lambda} + \int_\lambda^{l-\lambda} e' \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right) ds'$$

D'après les conventions d'ordre de grandeur, on a

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e_{l-\lambda} - e_\lambda}{\lambda}\right) = +2\frac{\partial^2 e}{\partial s\,\partial t} = -2\frac{\partial^2 i}{\partial s^2}$$

et ce terme est négligeable par rapport à $2 \log \frac{2\lambda}{\alpha}\frac{\partial^2 i}{\partial s^2}$.

275. — Nous pouvons écrire cette équation sous la forme

$$(5)\left\{\begin{aligned}
&2\left(\frac{\partial^2 i}{\partial s^2}-\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}\right)\log\frac{2\lambda}{\alpha}\\
&+\int\left(\frac{\partial^2 i'}{\partial s'^2}-\frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial^2 i'}{\partial t^2}\right)\frac{\eta\cos\theta\cos\theta'+(1-\eta)\cos\varepsilon}{r}\,ds'\\
&+\int\left[\frac{\partial i'}{\partial s'}\frac{\cos\theta}{r^2}-\frac{\partial^2 i'}{\partial s'^2}\frac{\eta\cos\theta\cos\theta'+(1-\eta)\cos\varepsilon}{r}\right]ds'\\
&-\frac{1}{k\pi\alpha^2}\frac{\partial i}{\partial t}
\end{aligned}\right\}=0$$

Nous rappelant les relations établies au Chapitre X (p. 129).

$$\cos\theta'=\frac{\partial r}{\partial r'},\qquad \cos\theta=-\frac{\partial r}{\partial s};\qquad \cos\varepsilon=-\frac{\partial}{\partial s'}\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right),$$

nous pouvons transformer l'intégrale de la troisième ligne, au moyen d'intégrations par parties, et lui donner la forme

$$(6)\left\{\begin{aligned}
&+\left[S'\frac{\partial i'}{\partial s'}\right]_{\lambda}^{l-\lambda}-\left[i'\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial S'}{\partial s'}\right)\right]_{\lambda}^{l-\lambda}\\
&+\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial S'}{\partial s'}\right)_{\lambda}\Big[i\Big]_{\lambda}^{l-\lambda}\\
&+\int_{\lambda}^{l-\lambda} i'\frac{\partial}{\partial s'}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial s}+\frac{\partial S'}{\partial s'}\right)ds'
\end{aligned}\right.$$

en posant

$$S'=\frac{\eta}{r}\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'}+\frac{1-\eta}{r}\frac{\partial}{\partial s'}\left(r\frac{\partial r}{\partial s}\right)$$

et rappelant par les limites λ, $l-\lambda$, que l'intégration s'étend à toute la partie du circuit extérieure à l'élément 2λ.

L'hypothèse déjà faite antérieurement pour l'établissement même des équations (1),... (4), que le rayon de courbure du fil est partout très grand par rapport à 2λ, rend les termes de la première et de la seconde lignes (6), négligeables par rapport au terme en $\log\frac{2\lambda}{\alpha}$ de l'équation.

Dans l'intégrale qui reste, la parenthèse peut être mise sous la forme.

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{r}\right) - \eta\,\frac{\partial^3 r}{\partial s\,\partial s'^2} + \frac{\partial}{\partial s'}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(r\,\frac{\partial r}{\partial s'}\right).$$

276. — Cela posé, il est évident que l'intégrale sera négligeable pour des formes de circuit variées. Elle serait rigoureusement nulle, quelle que soit la distribution de l'intensité, pour tout circuit tel que la distance r de deux quelconques de ses points satisfasse à l'équation

$$(7) \qquad \frac{\partial^2}{\partial s'\,\partial s}\left(\frac{1}{r} + \eta\,\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'}\right) - \frac{\partial^2}{\partial s'^2}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial s}\left(r\,\frac{\partial r}{\partial s}\right)\right) = 0.$$

Sans chercher à intégrer cette équation, contentons-nous de l'examen d'un cas particulier.

I. — Si le fil est rigoureusement rectiligne on a

$$\text{Val. absolue } (s' - s) = r$$

Du côté où s' est plus grand que s, on a donc

$$\frac{\partial r}{\partial s'} = 1, \qquad \frac{\partial r}{\partial s} = -1, \qquad \frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = 0;$$

et l'équation de condition (7) est satisfaite.

Donc, rigoureusement pour un fil rectiligne, et approximativement pour un fil sinueux, s'écartant peu, et par lentes ondulations, de la forme rectiligne, la troisième ligne de l'équation (5) peut-être effacée.

II. — Si le fil forme un circuit circulaire de très grand rayon on a

$$s' - s = 2R\theta, \qquad r = 2R \sin\theta,$$

et le premier membre de l'équation (7) devient

$$(2 + \eta)\,\frac{\sin\theta}{8R^3}.$$

Pour un circuit circulaire, la troisième ligne de l'équation (5) ne peut pas être effacée en général, c'est-à-dire, quelle que soit la loi

de l'intensité i', soit avec la loi élémentaire de Weber ($\eta = 1$) soit avec celle de Neumann ($\eta = 0$) ; il faudrait que η soit égal à -2, pour que cette disparition de l'intégrale soit possible.

Au point où nous en sommes parvenus de cette étude, nous ne savons rien encore de la valeur de cette constante ; nous verrons un peu plus loin, que la stabilité de l'équilibre électrostatique exige que η soit plus petit que $\frac{1}{2}$, ce qui n'est pas incompatible avec la valeur -2.

Quoiqu'il en soit, l'intégrale qui reste est alors

$$\frac{2+\eta}{8R^3}\int_{\lambda}^{l-\lambda} i' \,.\, \sin\theta \,.\, ds' = \frac{2+\eta}{4R^2}\int_{\lambda}^{l-\lambda} i' \sin\theta \, d\theta.$$

Il est important d'examiner si dans l'ensemble de la circonférence une compensation serait possible :

Supposons l'intensité i' développée en série de Fourier, par rapport à l'angle au centre, 2θ,

$$i'_t = i_s + \sum (a_n \cos 2n\theta + b_n \sin 2n\theta).$$

On reconnait facilement que tous les termes subsistent ; en particulier le premier terme donne

$$\frac{2+\eta}{4R^2} \,.\, 2i \cos\left(\frac{\lambda}{2R}\right).$$

Il n'y a donc aucune compensation, malgré la simplicité de forme de la circonférence, en dehors de celle que donnerait $\eta = -2$.

Il n'est donc pas probable qu'il existe des circuits fermés parmi les intégrales de l'équation 7, sauf pour des valeurs numériques particulières de la constante des circuits ouverts η.

277. Vitesse de propagation dans les fils rectilignes. — Revenons maintenant à l'équation (5).

Si le fil est peu ondulé de part et d'autre d'une droite, la 3e ligne est négligeable.

Si la variation d'intensité dans le temps est très rapide, $\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}$ est très grand par rapport à $\frac{\partial i}{\partial t}$; par conséquent, si le fil est en même temps très conducteur, la dernière ligne devient négligeable.

Dans ces conditions, l'équation (5) est elle-même satisfaite, quelle que soit la détermination particulière de λ lorsqu'on a

$$\frac{\partial^2 i}{\partial s^2} = \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}.$$

Donc, en résumé, dans un fil sensiblement rectiligne (sans fil de retour contigu) les variations d'intensité très rapides dans le temps se propagent sensiblement avec la vitesse Ω de la lumière.

278. — Cela résulte des lois de l'induction et des forces électrostatiques, considérées comme s'exerçant instantanément à toute distance.

Dans un fil circulaire d'après ces mêmes lois les variations rapides d'intensité ne se propageraient avec la vitesse de la lumière que si la constante η des circuits ouverts, $\left[\frac{1-x}{2}\right.$ *d'Helmholtz*$\left.\right]$ *avait la valeur — 2 que rien ne rend actuellement probable.*

(La valeur qui correspond à la formule d'Ampère est + 3.

L'étude expérimentale de la propagation des variations d'intensité très rapides en circuit fermé permettrait de fixer la valeur de cette constante.

Mais c'est un sujet sur lequel il est inutile de pousser plus loin la recherche du seul point de vue des actions instantanées à distance. Les vues géniales de Maxwell, confirmées et dégagées de leur gangue par les mémorables expériences de Hertz, nous ont appris que ce n'est pas seulement le long des fils conducteurs que la propagation se fait avec la vitesse de la lumière, mais aussi dans l'espace qui les sépare. Avant de reprendre cette discussion, il faut apprendre comment cette propagation dans le vide modifie toutes nos équations.

LIVRE IV

CHAPITRE PREMIER

LE CHAMP D'INDUCTION AVANT MAXWELL

279. L'extension aux circuits ouverts des lois de l'induction en circuits fermés exige que nous établissions un lien entre les forces électriques dues aux charges électriques, et les forces électriques dues aux variations des courants.

Ces relations ne peuvent pas être tirées rigoureusement des seules lois expérimentales déjà étudiées ; mais l'indétermination est minime quand le pouvoir diélectrique K de tout l'espace est le même, quelles que soient d'ailleurs les variations de la conductilité k. C'est à ce cas que nous nous limiterons dans ce livre IV.

280. — Nous nous placerons d'abord au point de vue le moins hypothétique dans nos généralisations ; nous examinerons si les conséquences en sont conformes aux expériences nouvelles qui peuvent les contrôler ; et nous modifierons notre mode de généralisation d'après la nature des désaccords. Un tel examen détaillé a acquis depuis

quelques années une importance imprévue ; certaines généralisations conformes au sentiment universel des physiciens, et qui paraissaient avoir reçu la sanction de l'expérience semblent au moins douteuses à la suite des expériences variées de M. Crémieu. Il importe donc de savoir si réellement ces très difficiles expériences sont en contradiction avec les phénomènes certains de propagation, comme la forme actuelle de la théorie l'indique, et si par conséquent elles ont été faussées par quelque cause d'erreur capable de dissimuler l'effet réel ; ou si elles ne sont en opposition qu'avec quelque hypothèse non essentielle de la théorie, introduite comme évidente, mais réformable. C'est à ce point de vue, mais pour une discussion ultérieure et non immédiate, qne nous allons procéder ici par prudentes étapes.

281. — L'étude des courants nous a révélé que la force électrique définie à partir du courant, par la loi d'Ohm, est, dans les conducteurs, la somme de trois termes : une force électrique d'hétérogénéité **E** tenant à la nature matérielle du corps, une force provenant des charges électriques, et obéissant aux lois de Coulomb-Cavendish, $-\frac{\partial V}{\partial x}, -\frac{\partial V}{\partial y}, -\frac{\partial V}{\partial z}$, et une force provenant des variations d'intensité des courants, et composée du terme de Neumam $-\frac{\partial F_1}{\partial t}, -\frac{\partial F_2}{\partial t}, -\frac{\partial F_3}{\partial t}$, et peut-être d'un terme complémentaire sans influence en circuit fermé.

La force Coulomb-Cavendish est définie, en milieu diélectriquement homogène, par l'équation de Poisson

$$K\Delta V = -4\pi\Omega^2 e \tag{1}$$

et celle de Coulomb

$$K\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]_A^B = -4\pi\Omega^2 e_s. \tag{1'}$$

La relation entre la charge et les densités de courant est définie par les équations

$$\text{Div.}\, j_1 = -\frac{\partial e}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\left[j_n\right]_A^B = -\frac{\partial e_s}{\partial t}, \tag{2'}$$

et la loi d'Ohm définit la force électrique totale E par les équations

$$(3) \qquad j_1 = k(E_1 - \mathbf{E}_1).$$

Enfin la force électrique de Neumann est définie au moyen des équations

$$(4) \qquad \Delta F_1 = -4\pi j_1.$$

282. — La force complémentaire doit donner un total nul le long d'un circuit fermé quelconque, lorsque tous les courants actifs sont fermés.

Supposons, ce qui semble indiqué par la nature du phénomène sans être nécessaire, que cette force complémentaire soit une fonction linéaire des intensités, des charges, ou de leurs dérivées par rapport à l'espace et au temps ; elle se composera donc de deux termes : le premier, dont l'intégrale pour un circuit fermé est nulle, quelle que soit la distribution des intensités ; le second dont la valeur est nulle en tout point quand tous les circuits actifs sont fermés.

283. — La première de ces deux forces complémentaires dérive nécessairement d'une fonction de force finie et continue ainsi que ses dérivées premières par rapport aux coordonnées. La continuité des dérivées est nécessaire, parce que les circuits fermés expérimentalement peuvent présenter des points anguleux quelconques sans que la force de Neumam cesse d'être suffisante.

Soit

$$j'_1\Psi_1 + j'_2\Psi_2 + j'_3\Psi_3$$

une fonction linéaire des densités de courant au point $x'y'z'$, et Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3, trois fonctions des coordonnées $x'y'z'$ et de celles xyz du point où l'on observe la force électrique induite : celle-ci a pour composantes les intégrales, étendues à l'espace entier, des expressions élémentaires :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial x}(j'_1\Psi'_1 + j'_2\Psi'_2 + j'_3\Psi'_3)\right] dx'\,dy'\,dz'$$

suivant Ox et les analogues suivant Oy, Oz.

284. — L'élément de courant $(j'_3\, dx'\, dy')dz'$ produit donc sur un élément de circuit dx une force électrique induite

$$\left(\frac{\partial j'_3}{\partial t} \cdot dx'\, dy'\right) \cdot dz'\, \frac{\partial \Psi'_3}{\partial x}.$$

Si l'on admet qu'il y ait *réciprocité instantanée* pour cette force complémentaire comme on l'a admis, d'après les expériences du milieu du XIXe siècle, pour la force de Neumann, la force induite dans l'élément dz' par la variation $\left(\frac{\partial j_1}{\partial t}\, dy\, dz\right) dx$ dans l'élément dx est aussi

$$\left(\frac{\partial j_1}{\partial t}\, dy\, dz\right) \cdot dx\, \frac{\partial \Psi'_3}{\partial x}.$$

Or, d'après la forme générale, le coefficient n'est pas $\frac{\partial \Psi'_3}{\partial x}$, mais

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z'}.$$

Il faut donc que ce coefficient soit de la forme $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial z'}$; la fonction φ ne dépendant plus de l'orientation des deux éléments, mais seulement de leur position.

Le second terme complémentaire signalé au n° **281** est alors compris dans le premier comme nous le verrons n° **286**.

285. — Considérée comme définissant une action directe à distance, cette fonction φ ne peut donc plus dépendre que de la distance r des deux points. Si on la considérait comme transmise, même instantanément à travers un milieu, la conclusion qu'elle ne dépend que de la distance ne s'imposerait pas, lorsque le milieu est hétérogène : pour préciser la pensée par un exemple, le potentiel électrostatique en un point, dû à une charge déterminée en un autre point, dépend uniquement de la position des deux points, lorsque le milieu est donné, mais il dépend de ce milieu, et change quand on interpose un conducteur ou un diélectrique non chargés. Pour les forces induites peu rapides, on sait que c'est l'hétérogénéité magnétique qui influe. Nous ne nous en occupons pas dans ce livre IV.

286. — Nous admettrons, dans ce Chapitre, que, dans un milieu diélectriquement homogène, la fonction φ ne dépend plus que de r. Posons donc

$$F = \int \left(j'_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + j'_2 \frac{\partial \varphi}{\partial y'} + j'_3 \frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right) d\tau'$$

les composantes de la force induite en x, y, z sont

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial t};$$

Cette force doit être homogène avec la force électrique de Neumann : il faut donc que les dérivées secondes $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \, \partial y'}$ soient homogènes à l'inverse d'une longueur et par conséquent que φ soit homogène à une longueur. Si conformément aux vues qui nous ont guidé jusqu'à présent, nous admettons qu'il s'agit d'une forme universelle, indépendante de toute propriété particulière d'une substance quelconque, autre que l'éther du vide, nous sommes conduits à la regarder comme fonction de purs nombres, de la vitesse de la lumière [1], et de la distance r ; mais comme elle ne dépend pas de l'unité de temps, la vitesse de la lumière n'y peut pas figurer. Nous aboutissons ainsi sans ambiguïté à la forme proposée par Helmholtz

$$\varphi = Br$$

B étant un nombre pur, que l'observation des circuits ouverts doit permettre de déterminer.

$$F = B \int \cdot \left(j'_1 \frac{\partial r}{\partial x'} + j'_2 \frac{\partial r}{\partial y'} + j'_3 \frac{\partial r}{\partial z'} \right) d\tau'.$$

Cela nous ramène à la troisième forme (5) n° 186 de la loi de la

[1] Du point de vue élastique, l'éther est entièrement caractérisé par sa densité (dimensions ML^{-3}) et ses vitesses de propagation (dimensions L^2T^{-2}) dont aucune combinaison n'est indépendante à la fois de l'unité de masse et de l'unité de temps.

force électrique totale $-\frac{\partial i'}{\partial t}\left[\frac{\alpha}{r}\cos\varepsilon + \frac{1-\alpha}{r}\cos\theta\cos\theta'\right] ds\, ds'$
en posant $B = \alpha - 1$; car on a, d'après les équations du n° **183**

$$\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'} = \frac{\cos\theta\cos\theta' - \cos\varepsilon}{r}.$$

Ce terme complémentaire F pris sous cette forme ne contient qu'une intégrale de volume, sans intégrale de surface, car d'après la loi d'Ohm, les densités de courant, proportionnelles à la conductibilité k qui est finie, ne peuvent devenir infinies dans une surface.

287. — En intégrant par parties, nous pouvons avec Helmholtz mettre en évidence les variations de charge au lieu des densités de courant :

$$F = -B\int r \,.\, \mathrm{Div}.j' \,.\, d\tau' - B\int r\left[j'_n\right]_A^B dS'$$

ou, d'après les équations (2) et (2)',

$$F = B\int r\,\frac{\partial e'}{\partial t}\,d\tau' + B\int r\,\frac{\partial e'_s}{\partial t}\,dS'.$$

La fonction F est donc la dérivée par rapport au temps du *second potentiel* des charges électriques ; elle satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta F = -2B.\,4\pi\,\frac{\partial e}{\partial t}. \tag{5}$$

Sous cette forme, on voit que la fonction F elle-même est nulle quand les courants sont fermés partout, les charges étant alors constantes.

288. — Introduisons maintenant le potentiel V sous la forme particulière de ce Chapitre n° **280** ; il vient

$$F = -\frac{K}{4\pi\Omega^2}\,B\,\frac{\partial}{\partial t}\left[\int r\,.\,\Delta V'\,.\,d\tau' + \int r\left[\frac{\partial V'}{\partial n}\right]_A^B dS'\right],$$

et, par application du théorème de Green,

$$\mathbf{F} = -\frac{2K}{4\pi\Omega^2} B \frac{\partial}{\partial t}\left[\int \frac{V'}{r}\, d\tau' + \int \left[V'\right]_A^B \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS'\right]$$

en remarquant que

$$\Delta r = \frac{2}{r};$$

l'équation aux dérivées partielles est alors :

$$(5)_a \qquad \Delta \mathbf{F} = + 2\frac{K}{\Omega^2} B \frac{\partial V}{\partial t}$$

et

$$(5)'_a \qquad \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial n}\right]_A^B = + \frac{2K}{\Omega^2} B \frac{\partial}{\partial t}\left[V\right]_A^B.$$

La force électrique complète est

$$(6) \qquad E_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}.$$

289. — Récapitulons les équations du champ

$$(1) \qquad K\Delta V = -4\pi\Omega^2 e$$

$$(2) \qquad \text{Div. } j = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

$$(3) \qquad j_1 = k(E_1 - \mathbf{E}_1)$$

$$(4) \qquad \Delta F_1 = -4\pi j_1$$

$$(5) \qquad \Delta \mathbf{F} = + \frac{2K}{\Omega^2} B \frac{\partial V}{\partial t}$$

$$(6) \qquad E_1 = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}.$$

et aux surfaces de discontinuité :

$$(1)' \qquad K \left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]_A^B = - 4\pi\Omega^2 e_s,$$

$$(2)' \qquad \left[j_n\right]_A^B = - \frac{\partial e_s}{\partial t},$$

$$(3)' \qquad \left[V\right]_A^B = U$$

$$(4)' \qquad \begin{cases} \left[F_1\right]_A^B = o \,, \,.. \,, \,.., \\ \left[\frac{\partial F_1}{\partial n}\right]_A^B = o \,, \,.. \,, \,.., \end{cases}$$

$$(5)_a \qquad \begin{cases} \left[F\right]_A^B = o \\ \left[\frac{\partial F}{\partial n}\right]_A^B = + 2 \frac{K}{\Omega^2} \left[V\right]_A^B. \end{cases}$$

Si les deux milieux en contact sont homogènes, les **E** sont nulles, et U est une constante caractéristique de ces deux milieux.

290. — Propagation des potentiels V, F_1, F_2, F_3, dans un milieu homogène. — L'élimination de e et de j entre les équations 1, 2, 3, donne

$$K \frac{\partial}{\partial t} \Delta V = + 4\pi\Omega^2 k \text{ Div. E},$$

et au moyen de l'équation 6

$$K \frac{\partial}{\partial t} \Delta V = - 4\pi\Omega^2 k \left(\Delta V - \frac{\partial}{\partial t} \Delta F + \frac{\partial}{\partial t} \text{Div. F}\right).$$

D'autre part (1), (2) et (4) donnent

$$\Delta \text{ Div. } F_1 = - \frac{K}{\Omega^2} \frac{\partial}{\partial t} \Delta V$$

ou

$$(7) \qquad \text{Div.}\, \mathbf{F}_1 = -\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial V}{\partial t},$$

puisque l'équation est valable dans tout l'espace sans discontinuité.

Au moyen de cette équation et de l'équation $(5)_a$, éliminant F_1 et $\mathbf{F}$, on obtient l'équation de propagation du potentiel électrostatique

$$(I) \qquad K\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Delta V = 4\pi\Omega^2 k\left(\Delta\Delta V + (2B+1)\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta V\right)$$

qui convient aussi à la fonction $\mathbf{F}$.

Les équations (3), (4) et (6) donnent en formant la *rotation* des F,

$$(II) \qquad \Delta\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) = +\,4\pi k\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right).$$

291. — Le potentiel vecteur F_1, F_2, F_3 peut donc être divisé en deux parties; l'une F'_1 F'_2 F'_3, dont la divergence est nulle, n'intervient pas dans l'équation (7) ni par conséquent dans l'équation (I), et se propage d'une manière indépendante du potentiel électrostatique : sa loi de propagation est alors donnée par les équations II, qui se ramènent à

$$(II)' \qquad \begin{cases} \text{Div.}\, F' = 0 \\ \Delta F'_1 = 4\pi k\dfrac{\partial F'_1}{\partial t}. \end{cases}$$

La seconde partie F''_1, F''_2, F''_3, pour permettre de passer de la forme II à II', doit dériver d'une fonction Φ

$$F''_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad F''_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad F''_3 = \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

et cette fonction d'après l'équation (7) satisfait à

$$\Delta\Delta\Phi = -\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial}{\partial t}\Delta V$$

ce qui l'adjoint à la fonction $\mathbf{F}$, comme le montre d'ailleurs la forme de l'équation I.

Ainsi la propagation sépare le potentiel induit en deux parties dont une accompagne le potentiel électrostatique.

292. Isolant indéfini. $k = o$. — Les équations se réduisent à

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta\Delta V = o$$
$$\Delta F_1 = o$$

ni l'un ni l'autre des deux potentiels ne se propage; l'un et l'autre se modifient simultanément dans toute l'étendue de l'isolant.

293. Conducteur parfait, indéfini. $k = \infty$. — Les équations se réduisent à

$$-\Delta\Delta V + (2B + 1) \frac{K}{\Omega^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta V = o.$$

$$\frac{\partial F'_1}{\partial t} = o, \quad \frac{\partial F'_2}{\partial t} = o, \quad \frac{\partial F'_3}{\partial t} = o.$$

Le potentiel induit est invariable.

Le potentiel électrostatique se propage avec la vitesse constante

$$\frac{\Omega}{\sqrt{K(1 + 2B)}}.$$

Comme on sait que l'équilibre atteint par les conducteurs est stable, il faut que cette vitesse de propagation soit réelle; la constante B ne peut donc pas être inférieure à $-\frac{1}{2}$; elle peut être nulle, comme dans la forme de F. Neumann.

Le cas limite $B = -\frac{1}{2}$ offre un intérêt particulier; dans le conducteur parfait le potentiel électrostatique se propage alors instantanément — comme la pression dans un liquide — et aucune partie du potentiel induit ne l'accompagne; celui-ci, au contraire, reste entièrement invariable.

294. Conducteur quelconque indéfini. — Lorsque k n'est ni nul ni infini, la partie rotative du potentiel induit se diffuse comme la chaleur.

Le potentiel électrostatique et le reste du potentiel induit se propagent avec dispersion et absorption simultanées ; chaque onde périodique a son amortissement, et sa vitesse de propagation toujours inférieure à $\frac{\Omega}{\sqrt{(2B+1)K}}$. La stabilité, même pour des perturbations de période infiniment longue, exige encore que B soit supérieur à $-\frac{1}{2}$. Posant en effet

$$V = Ae^{i\alpha x + \theta t}$$

et substituant dans I, il vient

$$K\theta = -4\pi\Omega^2 k\left(1 + (2B+1)\frac{K}{\Omega^2}\frac{\theta^2}{\alpha^2}\right),$$

équation qui donne

$$\theta = \frac{-\alpha^2 \pm \sqrt{\alpha^4 - \alpha^2(8\pi k\Omega)^2\frac{2B+1}{K}}}{8\pi k(2B+1)}.$$

Pour un trouble périodique dans l'espace, qui ne devient infini ni du côté des x positifs, ni du côté des x négatifs, c'est-à-dire pour lequel α est réel, la somme des racines $\frac{-\alpha^2}{4\pi k(2B+1)}$, est négative, et leur produit $\frac{\Omega^2\alpha^2}{K(2B+1)}$ est positif, en même temps que $2B+1$ est positif.

Si donc les deux racines sont réelles, il faut, pour que le mouvement ne croisse pas indéfiniment dans le temps, c'est-à-dire, pour que l'état soit stable, que $2B+1$ soit positif. Si la valeur de α^2 est telle que θ soit complexe, la même condition est encore nécessaire et suffisante pour la stabilité.

Pour θ imaginaire très petit, c'est-à-dire pour les très longues périodes $\frac{2\pi}{\theta}$, l'équation se réduit à

$$o = 1 + (2B+1)\frac{K}{\Omega^2}\left(\frac{\theta}{\alpha}\right)^2$$

et donne la même vitesse de propagation $\frac{\Omega}{\sqrt{K(2B+1)}}$ que si le milieu était conducteur parfait.

Dans le cas limite $B = -\frac{1}{2}$ le potentiel induit est complètement séparé du potentiel électrostatique et se propage indépendamment. Le potentiel électrostatique se diffuse suivant une loi très simple, qu'on obtient en remontant aux équations primitives : les charges électriques s'évanouissent sur place suivant la loi

$$e = e_0 \, e^{-\frac{4\pi k \Omega^2}{K} t}.$$

comme en l'absence de tout phénomène d'induction.

295. Milieux limités. Surfaces. — Aux surfaces de séparation, les conditions de continuité pour le potentiel électrostatique sont distinctes de celles du potentiel induit. L'association intérieure d'une partie du potentiel induit avec le potentiel électrostatique se rompt donc aux surfaces limites des conducteurs et des isolants, et comme conséquence les phénomènes de propagation avec une vitesse finie quoique très grande, sont transmis à tout le potentiel induit par les conditions à la surface, sauf dans le cas particulier $B = -\frac{1}{2}$ qui rend l'indépendance complète.

Cette vitesse de propagation, conséquence des conditions à la surface, dépend nécessairement de la valeur de B, et soit dans le problème des câbles, soit dans celui des fils en large boucle de Kirchhoff, il faut tenir compte de cette force électrique complémentaire d'Helmholtz.

CHAPITRE II

LE CHAMP DE FORCE ÉLECTRIQUE
MAXWELL. — HERTZ

296. — Les potentiels ne sont qu'un intermédiaire pour la détermination de la force électrique et il y a intérêt à écrire les équations sous une forme qui en soit indépendante. Les équations (4), $(5)_a$, (6) permettent d'éliminer F_1, F_2, F_3 et F ; on a alors

(1) $$K\Delta V = -4\pi\Omega^2 e$$

(2) $$\text{Div.}\, j = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

(3) $$j_1 = k(E_1 - E_1)$$

$(4)_b$ $$\Delta E_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\Delta V + 2B\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\right) + 4\pi\frac{\partial j_1}{\partial t}$$

avec les équations superficielles

$(1)'$ $$K\left[\frac{\partial V}{\partial n}\right]_A^B = -4\pi\Omega^2 e_s$$

$(2)'$ $$\left[j_n\right]_A^B = -\frac{\partial e_s}{\partial t}$$

$(3)'$ $$\left[V\right]_A^B = U$$

$(4)'_b$ $$\left[E_1 + \frac{\partial V}{\partial x}\right]_A^B = o, \quad \left[E_2 + \frac{\partial V}{\partial y}\right]_A^B = o, \quad \left[E_3 + \frac{\partial V}{\partial z}\right]_A^B = o.$$

La comparaison des équations $(7)'$ avec l'équation $(1)'$ et avec

l'équation (3)', montre qu'on peut écrire, dans le cas spécial auquel nous nous sommes limités — K uniforme —,

$$(1)'_b \qquad K\left[E_n\right]_A^B = +\,4\pi\Omega^2 e,$$

et

$$(3)'_b \qquad \left[E_\sigma\right]_A^B = -\frac{\partial U}{\partial \sigma}$$

en désignant par σ un arc tangent à la surface de contact.

297. — Les équations superficielles électrostatiques conviennent donc aussi bien (K uniforme) à la force électrique totale qu'à la force électrostatique seule. Mais il n'en est pas de même en général pour l'équation interne; les équations (1), $(5)_a$, (6) et (7) donnent

$$(1) \qquad K\ \text{Div.}\ E = +\,4\pi\Omega^2 e + \frac{K^2}{\Omega^2}(1 + 2B)\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

La relation entre le flux de force électrique totale et la densité de l'électricité est moins simple que pour le flux électrostatique seul. Pour éliminer complètement V, il faut prendre le Δ de l'équation précédente, et écrire

$$(1)_c \qquad K\Delta.\ \text{Div.}\ E = 4\pi\left(\Omega^2\Delta e - K(1 + 2B)\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}\right)$$

ou sous forme intégrale

$$K\ \text{Div.}\ E = 4\pi\Omega^2 e + K(1 + 2B)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int\frac{e\,d\tau}{r}.$$

298. — De la forme compliquée de cette équation ne résulte aucune absurdité, ni aucune contradiction logique. Mais le goût de la simplicité qui a souvent guidé utilement dans les cas où l'expérience manquait encore, serait plus satisfait, si, à l'état variable, on n'était pas conduit à distinguer dans les diélectriques la force électrostatique de la force électrique totale, puisque dans les conducteurs cette distinction est inutile. C'est ce qui arrive dans le cas

limite où B est égal à $-\frac{1}{2}$, et ce qui donne une importance particulière à ce cas. On peut supposer que dans ce cas, la force pondéromotrice sur un corps chargé d'électricité sera encore égale au produit de la charge par la force électrique totale E, et non pas par la force électrostatique seule $-\frac{\partial V}{\partial x}$, laquelle peut avoir une tout autre direction. C'est ce que presque tous les physiciens admettaient sans hésitation jusqu'aux récentes expériences de M. Cremieu, qui a vainement tenté de mettre en évidence la partie induite de cette force pondéromotrice.

Sans entreprendre ici la discussion théorique de ces importantes expériences, concluons en seulement qu'il n'est plus permis d'invoquer comme une sorte de principe intuitif cette « unité de la force électrique ».

299. — L'équation $(1)_c$ donne la divergence de la force électrique en fonction des densités de charge. Des équations $(4)_b$ on tire facilement la rotation de la force électrique

$$(4)_c \qquad \Delta\left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right) = 4\pi \frac{\partial}{\partial t} k \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right).$$

On peut donc éliminer le potentiel électrostatique, et les densités de courant en adoptant le groupe d'équations

$$(1)_c \qquad K\Delta \text{ Div. } E = 4\pi\left(\Omega^2 \Delta e - K(1+2B)\frac{\partial^2 e}{\partial t^2}\right)$$

$$(2) \qquad \text{Div. } k(E_1 - \mathbf{E}_1) = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

$$(4)_c \qquad \Delta\left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right) = 4\pi \frac{\partial}{\partial t} k \left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right)$$

avec

$$(1)'_c \qquad K\left[E_n\right]_A^B = 4\pi\Omega^2 e_s$$

$$(2)'_c \qquad \left[k(E_n - \mathbf{E}_n)\right]_A^B = -\frac{\partial e_s}{\partial t}$$

$$(3)'_c \qquad \left[E_\sigma\right]_A^B = -\frac{\partial U}{\partial \sigma}.$$

300. — Par la manière dont elles ont été obtenues, ces équations sont certainement conformes à la réalité, lorsque les variations ne sont pas très rapides, et les systèmes réagissants pas très étendus dans l'espace. C'est en effet dans ces conditions qu'ont été exécutées les expériences fondamentales que nous avons invoquées, et de très nombreuses expériences de contrôle. Mais le résultat théorique obtenu pour les câbles, et sous certaines réserves pour les fils nus ainsi que dans les conducteurs étendus, montre qu'une vitesse de propagation de l'ordre de la vitesse de la lumière joue certainement un rôle important dans les actions électriques. Des expériences nouvelles sont donc nécessaires pour décider si l'hypothèse mathématique, de l'action instantanée à toute distance, employée dans l'interprétation des expériences tant d'induction que d'influence électrostatique, est rigoureuse ou seulement approchée.

Ces expériences ont été exécutées par Hertz en 1888, et elles ont fourni le résultat escompté par Maxwell vingt trois ans auparavant, avec une géniale audace. Ayant exclu systématiquement de ce livre toute conception sur la constitution des diélectriques, nous ne pouvons rappeler l'origine des vues, d'ailleurs très connues, de Maxwell; mais nous pouvons indiquer comment la doctrine de l'unité de la force électrique conduit à altérer les équations dans un sens qui change complètement les conséquences relatives aux phénomènes très rapides, sans changer sensiblement les phénomènes lents.

Si on prend $B = -\frac{1}{2}$, on a

$$\Delta V = -\text{Div. E}.$$

Dans l'équation $(4)_b$, cela donne rigoureusement :

$$(4)_d \qquad \Delta E_1 = \frac{\partial}{\partial x}\text{Div. E}_1 - \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial V}{\partial x} + 4\pi\frac{\partial j_1}{\partial t}.$$

301. Unité de la force électrique. Modification de l'équation (4). — Du point de vue de l'unité de la force électrique, envisagé algébriquement, il y a lieu de s'étonner qu'il reste dans cette

équation un terme dépendant de la force électrostatique seule, au lieu de dépendre de la force électrique totale ; l'équation véritable ne serait-elle pas

$$(4)_e \qquad \Delta E_1 = \frac{\partial}{\partial x} \text{Div. } E_1 + \frac{K}{\Omega^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial j_1}{\partial t} ?$$

Nous obtenons ainsi le nouveau système analytiquement cohérent

$$(1)_e \qquad K \text{ Div. } E = 4\pi\Omega^2 e$$

$$(2)_e \qquad \text{Div. } k (E_1 - E_1) = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

$$(4)_e \qquad \Delta E_1 = \frac{\partial}{\partial x} (\text{Div. } E) + \frac{K}{\Omega^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + 4\pi \frac{\partial}{\partial t} k (E_1 - E_1)$$

avec les équations superficielles $(1)'_e$ $(2)'_e$ $(3)'_e$.

Ces équations, relatives uniquement aux milieux diélectriquement et magnétiquement homogènes sont équivalentes à celles par lesquelles Hertz a traduit dans ce cas la doctrine de Maxwell. Le point de vue qui nous y a conduits ne serait applicable à des diélectriques variés que moyennant commentaire.

302. — Si dans la force électrique E_1 nous voulons toujours distinguer une partie électrostatique et une partie induite, nous pouvons écrire l'équation $(4)_e$ sous la forme

$$\Delta \left(E_1 + \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(4\pi j_1 + \frac{K}{\Omega^2} \frac{\partial E_1}{\partial t} \right).$$

La force induite, dans cette théorie, peut être assimilée à une force induite de Neumann, due à une densité de courant $j_1 + \frac{K}{\Omega^2} \frac{\partial E_1}{\partial t}$; j_1 est le *courant de conduction*, obéissant à la loi d'Ohm ; Maxwell a donné au second terme le nom, généralement adopté depuis, de *courant de déplacement*, qui rappelle peut-être trop l'hypothèse de Mossotti sur la constitution des diélectriques ; nous l'appellerons plutôt *courant diélectrique*.

Donnant alors à l'ensemble le nom de courant total, nous pouvons

déduire des équations (1) (2) que ce courant total est toujours fermé : car elles donnent

$$\text{Div. } j_1 + \frac{K}{\Omega^2} \text{ Div. } \frac{\partial E_1}{\partial t} = o.$$

Au point de vue des forces induites, la forme $(4)_e$ de l'équation qui les régit, équivaut donc à l'hypothèse suivante : le courant diélectrique $\frac{K}{4\pi\Omega^2} \frac{\partial E_1}{\partial t}$, produit les mêmes actions inductrices (et pondéromotrices) qu'un courant de conduction j_1 de même valeur électrostatique.

Le courant diélectrique subsiste seul dans les isolants ; dans les conducteurs, il s'ajoute au courant de conduction pendant l'état variable mais il est généralement négligeable à moins que les variations dans le temps ne soient extrêmement rapides.

Remarquons encore qu'on peut regarder ce courant, dans les conducteurs, comme correspondant au premier terme en $\frac{\partial I}{\partial t}, \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}, \ldots,$ dont nous avons indiqué précédemment l'existence comme possible (n° **186**), mais non révélée par les expériences entre deux états permanents.

303. — Des équations ainsi modifiées, Maxwell avait tiré toute la *théorie électromagnétique de la lumière*, qui exerça sur l'esprit des physiciens une sorte de séduction mystérieuse, sans réussir à forcer l'adhésion, jusqu'au jour où Hertz réussit à montrer que les conséquences de l'équation $(4)_e$, contraires à l'équation $(4)_b$, sont conformes à l'expérience.

C'est le mémoire de décembre 1888 [1], qui, à ce point de vue, est décisif. *Un excitateur électrique émet des forces transverses qui se propagent dans le vide avec une vitesse finie comparable (et même égale) à celle de la lumière Ω.* —

Tel est le résultat très net de ce mémoire célèbre et universellement connu.

[1] *Sitz. Berl-Ak-Wiss.* 1888 — et *Wied. Ann.* XXXVI, p. 769.

En conséquence, l'équation des forces électriques transverses doit être dans le vide

$$\Delta\left(\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}\right)=\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}\right)$$

et non pas

$(4)_e$ $$\Delta\left(\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}\right)=o.$$

Sans entrer plus avant dans la discussion de ces équations, et sans examiner, pour cette fois, si ce sont les seules qui coordonnent tous les faits certains, nous les adopterons désormais et nous en examinerons quelques conséquences particulières.

304. — Pour la commodité du langage, nous introduisons maintenant la notion de force magnétique bien que dans tout l'exposé qui précède elle n'ait joué aucun rôle. Nous appellerons force magnétique une quantité dont la dérivée par rapport au temps est égale à la rotation de la force électrique : c'est-à-dire à la force électrique par unité de surface dans un petit circuit perpendiculaire à cette variation de la force magnétique. Cette définition donne l'équation type

$$\frac{\partial M_1}{\partial t}=\frac{\partial E_3}{\partial y}-\frac{\partial E_2}{\partial z}$$

qu'on obtient facilement par un petit circuit $dy\,dz$. Nous appelerons souvent ce groupe d'équations, *équations de Faraday*, parce qu'elles définissent la force électromotrice induite par la variation du flux de force magnétique conformément aux vues de Faraday, élucidées par Maxwell.

Avec cette définition, l'équation $(4)_e$ intégrée par rapport au temps devient

$$\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}+4\pi k(E_1-\mathbf{E}_1)=-\frac{\partial M_3}{\partial y}+\frac{\partial M_2}{\partial z}.$$

C'est l'équation qui correspond à la définition de la force magnétique comme force pondéromotrice ; pour les courants constants, le premier terme disparait, et l'équation simplifiée par cette circons-

tance est alors exactement l'*équation d'Ampère*. Nous continuerons à donner le nom d'Ampère à la forme modifiée par Hertz conformément aux vues de Maxwell.

La forme d'équation $(4)_b$, antérieure à Maxwell ne permettait pas l'intégration par rapport au temps, et laissait subsister la forme bien plus complexe

$$+ 2B\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + 4\pi\frac{\partial j_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(\Delta V + \text{Div. E}) = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial M_3}{\partial y} + \frac{\partial M_2}{\partial z}\right)$$

également réductible à la pure forme d'Ampère pour les courants constants, et tirée plus directement que celle de Hertz-Maxwell des simples faits d'induction lente.

305. — Les énoncés généraux dont les équations précédentes sont la traduction pour des circuits particuliers fournissent de la manière la plus simple les équations du champ électromagnétique dans un système quelconque de coordonnées.

Équations de Faraday. (Milieu non magnétique). — La dérivée du flux de force magnétique par rapport au temps à travers un élément de surface est égale au travail de la force électrique, sur l'unité de charge, le long du contour parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Équations d'Ampère. — Le flux de courant de conduction et de courant diélectrique, multiplié par 4π, $\left[4\pi k(\text{E} - \text{E}) + \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial E}{\partial t}\right]$ à travers un élément de surface est égal au travail de la force magnétique, sur l'unité de masse magnétique, le long du contour parcouru en sens inverse des aiguilles d'une montre.

La continuité des dérivées de la force électrique a pour conséquence la continuité complète de la force magnétique.

306. Propagation. — Les équations de Maxwell-Hertz pour un milieu homogène (n° **301**)

$$4\pi\Omega^2 k \text{ Div. } E_1 = - K \frac{\partial}{\partial t} \text{Div. } E_1$$

$$\Delta E_1 = \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + 4\pi k\frac{\partial E_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\text{Div. } E_1)$$

donnent pour des variations proportionnelles à $e^{\theta t}$,

$$\left[4\pi\Omega^2 k + K\theta\right] \text{Div. } E_1 = o$$

$$\Delta E_1 = \left[\frac{K}{\Omega^2}\theta^2 + 4\pi k\theta\right] E_1 + \frac{\partial}{\partial x}(\text{Div. } E_1).$$

Deux cas peuvent se présenter :

$$1^\circ \left\{ \begin{array}{l} K\theta + 4\pi\Omega^2 k = o \\ \Delta E_1 = \dfrac{\partial}{\partial x}(\text{Div. } E_1). \end{array} \right.$$

La distribution des charges internes et superficielles du conducteur disparait sur place suivant la loi exponentielle propre au conducteur (n° 68) d'où l'on tire

$$e = \varepsilon\, e^{\theta t}, \qquad e_s = \varepsilon_s\, e^{\theta t},$$

puis

$$\Delta j_1 = -\theta \frac{\partial e}{\partial x} = -\theta\, e^{\theta t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x},$$

ce qui donne la distribution des densités de courant intérieures, lorsqu'on y joint la condition

$$\text{Div. } j_1 = -\theta\varepsilon\, e^{\theta t}$$

et la distribution des densités de courant superficielles

$$j_n = \theta\varepsilon_s\, e^{\theta t}.$$

Dans l'espace isolant qui entoure le conducteur, les forces électriques qui résultent de la charge variable du conducteur, satisfont aux équations

$$\text{Div. } E_1 = o$$

$$\Delta E_1 = \frac{K}{\Omega^2}\theta^2 E_1$$

$$E_n = \left(\frac{\theta}{k} + \frac{4\pi\Omega^2}{K}\right) e_s = o$$

et, puisque θ est déterminé, ces forces sont des intégrales de celles que donnent tous les éléments de courants complets, à loi de varia-

tion comme en t, dont nous avons donné la loi élémentaire ; la force électrique est tangente à la surface du conducteur.

307. — 2° Si θ a une valeur différente de celle qui caractérise le conducteur, les équations donnent

$$\text{Div. } E_t = 0$$

$$\Delta E_t = \left[\frac{K}{\Omega^2}\theta^2 + 4\pi k\theta\right] E_t$$

dans le conducteur ; dans l'isolant, les mêmes équations où l'on a fait k nul ; à la surface de séparation, les composantes tangentielles de E continues, et pour les composantes normales

$$(E_n)_{\text{isolant}} = \left(1 + \frac{4\pi\Omega^2 k}{K\theta}\right)(E_n)_{\text{conducteur}}.$$

Ces trois équations de continuité à travers la surface font de l'ensemble du conducteur et de l'isolant un système complexe, et ne peuvent être satisfaites à la fois en l'absence de sources extérieures que par un choix convenable de la valeur de θ ; le système a des périodes de vibration déterminées, et distinctes.

308. — Dans les conducteurs métalliques, le temps $\frac{K}{4\pi\Omega^2 k}$ est prodigieusement petit, de l'ordre de 10^{-17} à 10^{-19} secondes (n° 68) ; pendant ce temps la lumière parcourt $3{,}10^{-7}$ à $3{,}10^{-9}$ centimètres ($3\mu\mu$ à $0{,}03\mu\mu$). Or, les longueurs d'onde des vibrations les plus lentes sont de l'ordre des dimensions du corps vibrant ; les temps caractéristiques, $\frac{1}{\theta}$, correspondent donc pour des corps de dimensions tangibles à des longueurs de quelques dixièmes de millimètres au moins. En un mot, le facteur $\frac{4\pi\Omega^2 k}{K\theta}$ est au moins égal à 10^4, pour les plus petits conducteurs et beaucoup plus grand encore pour les conducteurs ordinaires de nos laboratoires. Donc E_n dans l'isolant est incomparablement plus grand que dans le conducteur.

Cela posé, si, dans le conducteur, les trois composantes de la force électrique sont de même ordre au voisinage de la surface, la compo-

sante normale dans l'isolant est incomparablement plus grande que les composantes tangentielles, et l'on peut dire que dans l'isolant la force électrique est alors normale à la surface. C'est l'opposé du cas précédent.

309. Force électrique à la surface. — Lorsqu'un conducteur est en équilibre électrostatique, les forces électriques dans l'isolant aboutissent normalement à la surface du conducteur ; dans le conducteur la force électrique est partout nulle. A la surface, les composantes tangentielles sont donc nulles tant dans l'isolant que dans le conducteur. *En partant d'un tel état d'équilibre initial, on peut admettre que les composantes tangentielles resteront nulles pendant tout l'état variable provoqué par la rupture d'équilibre,* sauf peut-être en des points particuliers. Laissant provisoirement de côté cette réserve, quitte à la discuter plus tard, nous admettrons cette condition dans les Chapitres suivants, conformément aux indications de Maxwell, généralement acceptées.

310. — Lorsqu'un conducteur est parcouru par un courant constant, la force électrique dans le conducteur est tangente à la surface ; dans l'isolant la composante tangente est la même que dans le conducteur ; la composante normale dépend de la charge superficielle. On a donc dans l'isolant

$$\frac{E_n}{E_t} = \frac{4\pi\Omega^2 k}{K}\frac{e_s}{j} = \frac{e_s}{j\tau}$$

le long d'un câble télégraphique par exemple, la densité superficielle e_s est incomparablement plus grande que celle qui est transportée par la densité de courant j pendant le temps si court $\tau = \frac{K}{4\pi k\Omega^2}$; et il en est encore de même à la surface d'un fil. *Lors donc que l'état initial est un état de courant permanent, il arrive encore généralement que, dans l'isolant, la force électrique normale est considérable par rapport à la force électrique tangente.*

CHAPITRE III

CHAMP D'UN ÉLÉMENT DE COURANT

311. — Nous nous occuperons dans ce Chapitre du champ de force électrique produit par un élément de courant, d'après la théorie de Maxwell-Hertz, et nous le comparerons à celui que donnent les théories anciennes.

Supposons l'élément de courant, dirigé suivant l'axe des z, placé à l'origine des coordonnées, dans un milieu isolant indéfini de pouvoir diélectrique K. Les équations (n° **300**)

$$(1)_e \qquad K\,\text{Div.}\,E = 4\pi\Omega^2 e$$

$$(2)_e \qquad \text{Div.}\,k(E_1 - \mathbf{E}_1) = -\frac{\partial e}{\partial t}$$

$$(4)_e \qquad \Delta E_1 = \frac{\partial}{\partial x}\,\text{Div.}\,E_1 + \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} + 4\pi\frac{\partial}{\partial t}\,k\,(E_1 - \mathbf{E}_1)$$

donnent alors

$$\frac{\partial e}{\partial t} = o$$

et, par conséquent, pour le champ dû à l'élément de courant seul, superposé au champ électrostatique ordinaire des charges invariables distribuées dans l'isolant,

$$(1) \qquad \text{Div.}\,E = o.$$

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta E_1 &= \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} \\ \Delta E_2 &= \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} \\ \Delta E_3 &= \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2 E_3}{\partial t^2} \end{aligned} \right.$$

sauf à l'origine des coordonnées, où existe un élément de courant

d'intensité I et de longueur $2l$ suivant l'axe des z. A cet élément de courant, isolé dans l'espace, est associé un doublet électrique de moment variable $\mathcal{E}$, résultant du transport d'électricité par le courant

(5) $$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 2l\,\mathrm{I}.$$

312. — La force électrique dûe à un tel élément est, par raison de symétrie, dans un plan méridien, et indépendante de l'azimuth. Prenons pour variables indépendantes z et la distance à l'origine r; soit E la composante équatoriale de la force électrique, on a

$$\mathrm{E}_1 = \frac{x}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,\mathrm{E}, \qquad \mathrm{E}_2 = \frac{y}{\sqrt{r^2 - z^2}}\,\mathrm{E},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\partial \mathrm{E}_1}{\partial y} = \frac{xy}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathrm{E}}{\sqrt{r^2 - z^2}} = \frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial x};$$

On peut donc écrire, en x, y, z,

(7) $$\mathrm{E}_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \, \partial z}, \qquad \mathrm{E}_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \, \partial z}$$

en représentant par $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ une fonction convenable de r et de z.

Les expressions de E_1, E_2, portées dans l'équation (1) donnent alors

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial \mathrm{E}_3}{\partial z} = 0$$

et permettent de poser

(8) $$\mathrm{E}_3 = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}\right)$$

sans ajouter de fonction arbitraire de x, y, t indépendante de z, parce que le champ dû à l'élément de courant central, ne comporte évidemment pas de force axiale indépendante de z.

En appelant U la fonction de r et de z qui satisfait à l'équation

(9) $$\Delta \Phi - \frac{\mathrm{K}}{\Omega^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \mathrm{U},$$

les équations (4) donnent alors

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

313. — La fonction U, que ces trois équations déterminent, est

$$(11)\qquad U = f(z, t) + \varphi(t) \log(x^2 + y^2) + \psi(t),$$

lorqu'on tient compte de la symétrie. f, φ, ψ désignent des fonctions arbitraires, dont on ne change pas le caractère en les écrivant sous la forme

$$f = \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) f_1(z, t)$$

$$\varphi = -\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi_1(t)$$

$$\psi = -\frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_1(t)$$

ce qui donne à U la forme

$$U = \left(\Delta - \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(f_1(z, t) + \varphi_1(t)\log(x^2 + y^2) + \psi_1(t)\right)$$

et conduit à poser

$$(12)\qquad \Phi = -\Pi + f_1(z, t) + \varphi_1(t)\log(x^2 + y^2) + \psi_1(t),$$

avec

$$(I)\qquad \Delta\Pi - \frac{K}{\Omega^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} = 0.$$

Or, quand nous remonterons de Φ à E_1, E_2, E_3, qui seules nous intéressent, par les formules (7) et (8), tous ces termes complémentaires disparaitront et il restera seulement

$$(II)\qquad E_1 = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \qquad E_2 = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \qquad E_3 = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2}.$$

Considérant Π comme fonction de z et de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, on peut écrire ces dernières formules sous la forme

$$E_1 = -\frac{x}{\rho}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z}, \qquad E_2 = -\frac{y}{\rho}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \rho \partial z}, \qquad E_3 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \Pi}{\partial \rho}\right)$$

ou encore

$$E_1 = -\frac{x}{\rho}\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\right),\quad E_2 = -\frac{y}{\rho}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\right),\quad E_3 = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}\right).$$

Sous cette forme, on voit que la force électrique est tangente, dans le plan méridien, à la courbe dont l'équation est

$$\text{(III)}\qquad \rho\frac{\partial\Pi}{\partial\rho} = \text{constante.}$$

Posons avec Hertz

$$Q = \rho\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}.$$

Les méridiennes $Q =$ cte., sont des lignes de force, et le flux de force électrique à travers un parallèle de rayon ρ

$$\int_0^\rho 2\pi\rho\, E_3\, d\rho$$

est d'après la valeur de E_3 égal à $2\pi(Q - Q_0)$ en appelant Q_0 la valeur de Q sur l'axe, au niveau du parallèle étudié.

314. — Il suffit donc de considérer l'équation (I), bien connue en acoustique.

Une intégrale, fonction de r et de t seulement, finie dans tout l'espace, sauf à l'origine, est

$$\text{(13)}\qquad \Pi_0 = \frac{\mathcal{F}_0(\Omega' t - r)}{r} + \frac{\mathcal{G}_0(\Omega' t + r)}{r}$$

en posant

$$\Omega' = \frac{\Omega}{\sqrt{K}}.$$

On obtient évidemment les intégrales fonction de r et de z, ainsi que de t, en dérivant un nombre quelconque de fois par rapport à z

et à t une fonction formée comme Π_0, avec d'autres fonctions arbitraires $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, des mêmes variables.

$$(14) \qquad \Pi_{n,p} = \frac{\partial^{n+p}}{\partial z^n \partial t^p}\left[\frac{\mathcal{F}_{n,p}(\Omega' t - r)}{r} + \frac{\mathcal{G}_{n,p}(\Omega' t + r)}{r}\right]$$

L'addition d'un nombre quelconque de termes de ce genre permet évidemment de représenter une source de révolution, placée à l'origine, d'un degré de complexité quelconque.

315. — Toutes les fonctions $\mathcal{F}$ correspondent à une propagation de la source vers l'espace infini, à une émission par conséquent; les fonctions $\mathcal{G}$, au contraire correspondent à une propagation vers la source, avec absorption à l'origine des coordonnées, et émission, datant d'ailleurs d'une époque infiniment reculée, par une surface sphérique source, de rayon infiniment grand.

Séparant les deux problèmes de l'émission et de l'absorption, nous ne nous occuperons que de l'émission à l'origine, et nous ne conserverons que les fonctions $\mathcal{F}$.

316. — Tenant compte dans les équations II de l'équation I, on peut les écrire

$$(\text{II})' \quad E_1 = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial z}, \quad E_2 = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial y \partial z}, \quad E_3 = -\frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \frac{1}{\Omega'^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}.$$

La force induite se compose donc d'une force électrique axiale, parallèle à l'élément de courant source, égale à $\frac{1}{\Omega'^2}\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}$, et d'une force dérivée de la fonction de force $-\frac{\partial \Pi}{\partial z}$.

Si l'on prend pour Π, la fonction (13) émissive, on a, en indiquant par un accent la dérivée de $\mathcal{F}$ par rapport à toute la variable $\Omega' t - r$,

$$(\text{IV}) \qquad \frac{1}{\Omega'^2}\frac{\partial^2 \Pi_0}{\partial t^2} = \frac{\mathcal{F}''(\Omega' t - r)}{r}$$

avec

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -\frac{z}{r}\left(\frac{\mathcal{F}}{r^2} + \frac{\mathcal{F}'}{r}\right)$$

et

$$
(V)\quad
\begin{cases}
-\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial x\,\partial z} = +\dfrac{x}{r}\dfrac{z}{r}\left(3\dfrac{\mathcal{F}}{r^3}+3\dfrac{\mathcal{F}'}{r^2}+\dfrac{\mathcal{F}''}{r}\right)\\[2ex]
-\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial y\,\partial z} = +\dfrac{y}{r}\dfrac{z}{r}\left(3\dfrac{\mathcal{F}}{r^3}+3\dfrac{\mathcal{F}'}{r^2}+\dfrac{\mathcal{F}''}{r}\right)\\[2ex]
-\dfrac{\partial^2\Pi}{\partial z^2} = +\dfrac{z}{r}\dfrac{z}{r}\left(3\dfrac{\mathcal{F}}{r^3}+3\dfrac{\mathcal{F}'}{r^2}+\dfrac{\mathcal{F}''}{r}\right)+\dfrac{\mathcal{F}}{r^3}+\dfrac{\mathcal{F}'}{r^2}.
\end{cases}
$$

317. — Or, à distance suffisamment petite de l'origine, les termes en $\frac{1}{r^3}$ deviennent prédominants, et les trois composantes de la force se réduisent sensiblement à

$$
+3\frac{xz}{r^2}\frac{\mathcal{F}}{r^3},\qquad +3\frac{yz}{r^2}\frac{\mathcal{F}}{r^3},\qquad +\left(3\frac{z^2}{r^2}-1\right)\frac{\mathcal{F}}{r^3},
$$

ou

$$
+\mathcal{F}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\qquad +\mathcal{F}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\qquad +\mathcal{F}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right).
$$

D'ailleurs à distance suffisamment petite de $\mathcal{F}(\Omega' t - r)$ ne diffèrera pas d'une manière appréciable de $\mathcal{F}(\Omega' t)$.

Ces expressions de la force électrique près de l'origine sont donc les mêmes que celles de la force *électrostatique* due à un doublet de moment $+\mathcal{F}(\Omega' t) = \Omega'^2\, \mathcal{E}(\Omega' t)$ dirigé suivant l'axe des z du côté positif.

Les expressions complètes IV, V, sont donc bien celles qui correspondent à un doublet de moment variable

$$
\mathcal{E}(\Omega' t)
$$

suivant Oz, à l'origine, et à l'élément de courant

$$
2lI = +\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t} = \Omega'\,\mathcal{E}'(\Omega' t)
$$

entre les deux pôles du doublet.

Nous pouvons considérer le terme (IV), comme la force induite de Neumann, se propageant avec la vitesse Ω', au lieu d'agir instantanément à toute distance ; et les termes (V) comme la force électrostatique également douée de propagation avec la même vitesse, au lieu d'être instantanée.

318. — La force totale peut être décomposée en deux, de diverses manières. Considérons-la comme formée d'une force radiale et d'une force parallèle au doublet. Dans ce cas la force radiale est

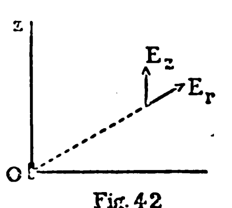


Fig. 42

$$E_r = -\frac{z}{r}\left(3\frac{\mathcal{F}}{r^3} + 3\frac{\mathcal{F}'}{r^2} + \frac{\mathcal{F}''}{r}\right)$$

et la force parallèle au doublet est

$$E_z = \left(\frac{\mathcal{F}}{r^3} + \frac{\mathcal{F}'}{r^2} + \frac{\mathcal{F}''}{r}\right).$$

La force parallèle au doublet est la même sur toute l'étendue de la sphère r, car elle ne dépend que de r et de t. La force radiale, proportionnelle à $\frac{z}{r}$, est nulle à l'équateur, maximum aux pôles, et varie dans l'intervalle comme le sinus de la latitude λ. Aux deux pôles la force totale est la même

$$-2\left(\frac{\mathcal{F}}{r^3} + \frac{\mathcal{F}'}{r^2}\right).$$

319. — On peut aussi faire la décomposition en une force longitudinale, et une force transversale c'est-à-dire une force suivant le rayon et l'autre normale au rayon ; ces forces sont

$$E_l = -2\frac{z}{r}\left(\frac{\mathcal{F}}{r^3} + \frac{\mathcal{F}'}{r^2}\right),$$

$$E_t = \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\left(\frac{\mathcal{F}}{r^3} + \frac{\mathcal{F}'}{r^2} + \frac{\mathcal{F}''}{r}\right);$$

Fig. 43

celle-ci comptée positivement dans le sens des latitudes positives λ.

Sous cette forme, on voit que, à grande distance, il ne reste que la force transverse

$$\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} \cdot \frac{\mathcal{F}''}{r}$$

nulle aux pôles, maximum à l'équateur, et dans l'intervalle, proportionnelle au cosinus de la latitude.

A petite distance, au contraire, cette partie de la force transverse devient négligeable, et il ne reste qu'une force oblique

$$\left(\frac{\mathcal{F}}{r^3}+\frac{\mathcal{F}'}{r^2}\right)\sqrt{1+3\frac{z^2}{r^2}}$$

faisant avec le rayon, vers les latitudes décroissantes, un angle ω donné par

$$\operatorname{tg}\omega = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{z^2}{r^2}-1} = -\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\lambda.$$

A distance quelconque, le flux de force électrique Q (nº **313**) est

$$Q = \rho\frac{\partial}{\partial\rho}\cdot\frac{\mathcal{F}(\Omega' t - r)}{r} = \frac{r^2 - z^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{\mathcal{F}(\Omega' t - r)}{r}$$
$$= -\frac{r^2 - z^2}{r^2}\frac{\mathcal{F}+r\mathcal{F}'}{r}.$$

320. **Elément de courant ancien** — Comparons maintenant ces distributions à celles que donneraient les théories antérieures à Maxwell.

L'élément de courant complet est toujours le doublet variable. Le champ qu'il produit résulte de la force électrostatique instantanée

$$\mathcal{F}\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\qquad \mathcal{F}\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\left(\frac{1}{r}\right),\qquad \mathcal{F}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

et de la force induite instantanée

$$-B\mathcal{F}''\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}(r),\qquad -B\mathcal{F}''\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(r),\qquad -B\mathcal{F}''\frac{\partial^2}{\partial z^2}(r)-\frac{\mathcal{F}''}{r},$$

d'après les expressions (6), et (5) avec

$$F = -B\mathcal{F}'\frac{\partial r}{\partial z}.$$

La première, et la principale différence avec le champ de Maxwell, c'est que $\mathcal{F}$, ou $\mathcal{F}(\Omega' t)$ désigne maintenant la valeur actuelle du moment du doublet ; tandis que $\mathcal{F}(\Omega' t - r)$ désignait tout à l'heure la valeur *antérieure*, datant de l'époque $t - \frac{r}{\Omega}$. Cette absence de

propagation dans les diélectriques est le caractère principal des anciennes théories.

Développons ces expressions, elles donnent

$$E_1 = \frac{xz}{r^2}\left(3\frac{\mathfrak{F}}{r^3} + B\frac{\mathfrak{F}''}{r}\right)$$

$$E_2 = \frac{yz}{r^2}\left(3\frac{\mathfrak{F}}{r^3} + B\frac{\mathfrak{F}''}{r}\right)$$

$$E_3 = \frac{z^2}{r^2}\left(3\frac{\mathfrak{F}}{r^3} + B\frac{\mathfrak{F}''}{r}\right) - \frac{\mathfrak{F}}{r^3} - B\frac{\mathfrak{F}''}{r} - \frac{\mathfrak{F}''}{r}.$$

La composante radiale et la composante axiale sont

$$E_r = \frac{z}{r}\left(3\frac{\mathfrak{F}}{r^3} + B\frac{\mathfrak{F}''}{r}\right),$$

$$E_z = -\left(\frac{\mathfrak{F}}{r^3} + (1 + B)\frac{\mathfrak{F}''}{r}\right).$$

La première proportionnelle au sinus de la latitude, la seconde constante sur une sphère de rayon r.

La composante longitudinale et la composante transverse, sont

$$E_l = \frac{z}{r}\left(2\frac{\mathfrak{F}}{r^3} - \frac{\mathfrak{F}''}{r}\right)$$

$$E_t = -\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\left(\frac{\mathfrak{F}}{r^3} + (1 + B)\frac{\mathfrak{F}''}{r}\right).$$

321. — Un second caractère différencie donc les anciennes théories de celle de Maxwell ; dans ces anciennes théories, quel que soit B, la force électrique ne devient pas transversale à grande distance ; elle fait avec le rayon, du côté des latitudes λ décroissantes, un angle α donné par

$$\operatorname{tg} \alpha = (1 + B)\sqrt{\frac{r^2}{z^2} - 1} = -(1 + B)\operatorname{cotg} \lambda.$$

Fig. 44

Cet angle α décroit de $\frac{\pi}{2}$ à o, en allant de l'équateur vers le pôle ; il est de signe contraire à $\frac{\pi}{2} - \lambda$, puisque $1 + B$ est toujours positif pour la stabilité. Lorsque B est positif, cette force dirigée du côté des latitudes décroissantes, pour

$\mathcal{F}' > o$, est en même temps divergente de l'axe dans l'hémisphère positif, et convergente dans l'hémisphère négatif.

C'est le contraire pour B négatif.

Pour $B = o$, il ne reste au loin que la force de Neumann, partout parallèle à l'élément et indépendante de la latitude.

Indépendamment de l'influence du temps, le champ de force électrique d'un élément de courant est donc très différent dans les théories anciennes, de Neumann et de Helmholtz, de celui auquel conduit la théorie de Maxwell-Hertz.

322. — L'expérience a décidé d'une manière incontestable : La force électrique se propage dans l'air avec la vitesse de la lumière; c'est ce que montrèrent pour la première fois d'une manière certaine les expériences de Hertz sur la réflexion, par une paroi métallique, des ondes électromagnétiques propagées dans l'air, et sur les interférences qui en résultent [1]. Quant au caractère purement transversal de la force électrique lointaine, les premières recherches de Hertz ne lui étaient pas favorables; avant toute théorie (1888) il avait trouvé la force parallèle au doublet à grande distance. Dans son mémoire théorique (1889), il discute le résultat expérimental, suppose que le parallélisme de l'excitateur et des parois a pu intervenir. « J'ai donc répété les expériences en changeant de différentes « manières la position de l'oscillateur, dit-il, et j'ai trouvé dans cer- « taines positions les résultats d'accord avec la théorie. Néanmoins, « les résultats n'étaient pas sans ambiguïté, car à grande distance et « là où la force est faible, les perturbations dues à tout ce qui en- « tourait l'espace disponible étaient si grandes que je n'ai pu arriver « à une détermination digne de foi ».

L'emploi des miroirs paraboliques dans les expériences ultérieures de radiation ne permettait plus de faire l'expérience.

Quoi qu'il en soit, la force électrique dans le voisinage du plan équatorial est, dans ces anciennes théories

$$E = -\frac{1}{r^3}\mathcal{F}(\Omega' t) - \frac{1+B}{r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}(\Omega' t)$$

(1) *Wied., Ann.*, XXXIV, p. 610, 1888, et *Abh.*, VIII.

elle contient un terme en raison inverse de la distance, qui ne diffère de celui de la théorie de Hertz que par le coefficient inconnu B et par l'absence de retard, la propagation étant instantanée.

323. Télégraphie Hertzienne. — Ces différences n'ont aucune importance dans l'application de ces phénomènes à la télégraphie sans fils, dite *Hertzienne*. La production des vibrations dans l'excitateur relève des anciennes théories, qui en ont donné l'explication depuis près d'un demi-siècle; la symétrie indiquait suffisamment la nécessité de mettre le demi-excitateur, ou antenne d'émission, vertical; et dans le voisinage de la terre, c'est-à-dire du plan équatorial de l'excitateur, toutes les théories indiquent que la force électrique d'induction est verticale, et en raison inverse de la distance. Ainsi, pour aucun de ces éléments essentiels, la télégraphie sans fils n'est sous la dépendance directe de la théorie de Maxwell-Hertz. Il n'en est pas moins juste, historiquement, de rattacher cette application aux travaux de Hertz, car avant l'ensemble de ses travaux, et malgré le beau mémoire de von Bezold, les physiciens ne savaient pas manier le choc en retour, n'en soupçonnaient pas la prodigieuse soudaineté, et ne songeaient pas à s'en servir pour provoquer des oscillations énergiques.

324. Réalisation des doublets. — Nous pouvons maintenant nous demander au moyen de quels conducteurs de dimensions finies ces doublets seraient réalisables; et si un doublet quelconque est réalisable au moyen d'un conducteur parfait. Pour cela il faut examiner dans quelles régions la force a une direction indépendante du temps, et trouver lorsque cela est possible la surface normale à la surface; ce sera la surface du conducteur cherché.

Or les composantes longitudinale et transverse de la force électrique sont (n° **319**)

$$E_l = -\frac{2z}{r}\left(\frac{\mathcal{F}}{r^3} + \frac{\mathcal{F}'}{r^2}\right)$$

$$E_t = \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\left(\frac{\mathcal{F}}{r^3} + \frac{\mathcal{F}'}{r^2} + \frac{\mathcal{F}''}{r}\right).$$

En un point z, r, pour que la direction de la force soit fixe, il faut que l'on ait, quel que soit $\Omega' t - r$,

$$\frac{\mathcal{F}}{r^3} + \frac{\mathcal{F}'}{r^2} + \frac{\mathcal{F}''}{r} = \varphi(r)\left(\frac{\mathcal{F}}{r^3} + \frac{\mathcal{F}'}{r^2}\right).$$

Cette équation est satisfaite d'abord d'une manière évidente lorsque $\mathcal{F}$ est une exponentielle réelle

$$\mathcal{F} = e^{-\lambda(\Omega' t - r)}$$

et on a alors

$$\varphi(r) = \frac{1 - \lambda r + \lambda^2 r^2}{1 - \lambda r}$$

puis

$$-\frac{E_t}{E_l} = \frac{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}}{2\frac{z}{r}} \frac{1 - \lambda r + \lambda^2 r^2}{1 - \lambda r}.$$

Nous y reviendrons bientôt.

325. — Si $\mathcal{F}$ n'est pas une exponentielle réelle, et par conséquent ne s'élimine pas d'elle-même, l'équation de condition détermine la fonction $\mathcal{F}(\Omega' t - r)$. Dans cette équation,

$$\mathcal{F}'' + \frac{1 - \varphi(r)}{r} \mathcal{F}' + \frac{1 - \varphi(r)}{r^2} \mathcal{F} = 0$$

les coefficients doivent donc ne dépendre que de $(\Omega' t - r)$, et être indépendants de r : Posons donc

$$\frac{1 - \varphi(r)}{r} = \frac{1}{a}, \qquad \frac{1 - \varphi(r)}{r^2} = \frac{1}{b}$$

nous en tirons

$$r = \frac{b}{a} \quad \varphi(r) = 1 - \frac{b}{a^2}.$$

Ainsi, il y a une seule surface le long de laquelle la force électrique a une direction fixe, et cette surface est celle d'une sphère, de

rayon $\frac{a}{b}$; mais si la force doit-être normale à cette sphère, φ doit-être nul, donc $b = a^2$, et $r = a$. L'équation en $\mathcal{F}$ devient

$$\mathcal{F}'' + \frac{1}{a}\mathcal{F}' + \frac{1}{a^2}\mathcal{F} = o$$

$\mathcal{F}$ est la partie réelle de l'exponentielle $e^{\lambda(\Omega' t - r)}$, avec

$$\lambda^2 + \frac{\lambda}{a} + \frac{1}{a^2} = o,$$

d'où

$$\lambda = -\frac{1}{2a} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2a}.$$

et

$$\mathcal{F} = \mathrm{A}e^{-\frac{1}{2a}(\Omega' t - r)} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2a}(\Omega' t - r) + \delta\right).$$

Ainsi, le seul conducteur parfait qui équivaille à un doublet oscillant est la sphère, et dans ce doublet le rapport du décrément logarithmique à la *pulsation* $\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)$ est fixe et égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ou 0,578. Si donc on réussit à produire un phénomène périodique d'amortissement différent, on aura dans le voisinage immédiat de l'oscillateur un champ beaucoup plus compliqué que celui d'un doublet simple.

326. — Revenons à l'exponentielle. Les composantes parallèle et normale à l'axe du doublet sont, d'après les formules relatives aux composantes longitudinale et transversale,

$$\mathrm{E}_z = \left[\frac{1}{r^3} - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda^2}{r} - \frac{z^2}{r^2}\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3\lambda}{r^2} + \frac{\lambda^2}{r}\right)\right] e^{-\lambda(\Omega' t - r)}$$

$$\mathrm{E}_\rho = -\frac{\rho z}{r^2}\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3\lambda}{r^2} + \frac{\lambda^2}{r}\right) e^{-\lambda(\Omega' t - r)}.$$

Cette forme montre que la force est normale à une famille de surfaces

$$z\, f(r) = \mathrm{V}$$

car on a alors

$$E_z = \left(\frac{z^2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + f(r)\right)\Phi(r, t),$$

$$E_\rho = \left(\frac{z\rho}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)\Phi(r, t),$$

Valeurs de $R = \frac{A\lambda^2}{rf(r)}$

λr	R	$\frac{1}{R}$
0.	0	∞
0,5	0,33	3
1.	0,55	1,82
2.	0,400	2,50
3.	0,308	3,25
4.	0,264	3,80
5.	0,242	4,12
6.	0,228	4,39
7.	0,216	4,62
8.	0,208	4,80
9.	0,203	4,93
10.	0,200	5,00
∞.	0,164	6,10

pourvu que la fonction f soit déterminée par l'équation

$$\frac{r\frac{\partial f}{\partial r}}{\frac{3}{r^3} - \frac{3\lambda}{r^2} + \frac{\lambda^2}{r}} = -\frac{f}{\frac{1}{r^3} - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda^2}{r}},$$

qui donne

$$f(r) = A\left(\frac{1}{r^3} - \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\lambda^2}{r}\right)e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2\lambda r - 1}{\sqrt{3}}}.$$

Pour dessiner les surfaces de niveau, V = cte, calculons $R = \frac{A\lambda^2}{rf(r)}$ en fonction de λr, puis les valeurs de $\frac{z}{r}$ correspondantes par l'équation

$$\frac{z}{r} = \frac{V}{rf(r)} = R.\frac{V}{A\lambda^2} = R\psi,$$

en posant

$$\psi = V : A\lambda^2$$

Près de l'origine (fig 45) pour $\psi > 6{,}1$ les surfaces sont à peu près identiques à deux sphères au contact.

Pour $6{,}1 > \psi > 0{,}164$ on a deux nappes : une nappe ovoïde près du centre et une deuxième ayant un cône asymptote dont

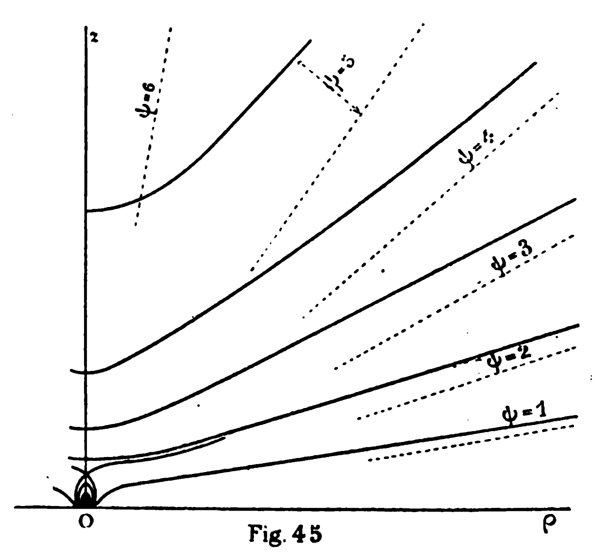


Fig. 45

Surfaces de niveau ψ d'un doublet amorti sans oscillations

l'angle est d'autant plus petit que ψ est plus grand. Pour $\psi = 0{,}164$ les deux nappes se rejoignent et l'on a un point conique.

Enfin pour $\psi < 0{,}164$ on n'a plus qu'une nappe.

Tous les points où la tangente passe par l'origine sont sur une même sphère de centre O passant par le point conique.

A grande distance la force électrique est perpendiculaire au rayon vecteur, ce qui n'a pas lieu au voisinage de l'origine.

327. — Nous avons vu que dans le voisinage de l'origine, les surfaces ont sensiblement la forme de deux sphères au contact ; puisque chacune de ces surfaces peut être considérée comme celle d'un conducteur où l'on peut faire naître des oscillations ayant l'amortissement correspondant à la valeur de λ choisie, on aura ainsi des excitateurs ressemblant beaucoup à celui de Righi : il est donc probable que ce dernier peut fournir un mouvement amorti apériodique.

Quand on changera la valeur de λ, cela reviendra à changer l'unité de longueur; or, près de l'origine, on aura encore deux surfaces contact qui conserveront sensiblement la même forme voisine de la forme sphérique; de sorte qu'on pourra réaliser deux surfaces différant très peu l'une de l'autre comme dimensions et donnant des amortissements très différents, puisqu'elles peuvent correspondre à des valeurs très différentes de λ. En un mot l'amortissement dépend uniquement de l'écart entre la forme des deux boules et la forme sphérique.

Ce qui précède permet de penser que ce n'est pas la région équatoriale mais les parties éloignées qu'il importe de développer pour avoir une bonne communication avec l'éther extérieur et un amortissement rapide.

Toutefois les résultats obtenus au Chapitre VI du Livre II, sur l'absence de localisation superficielle des courants amortis sans oscillations dans une lame plane (n° **242**) ou dans un cylindre (n° **245**), rendent douteux que la surface du conducteur soit encore dans ce cas nécessairement perpendiculaire aux lignes de force dès que l'amortissement est rapide. Nos surfaces perpendiculaires aux lignes de force ne sont donc peut-être pas les surfaces des conducteurs métalliques capables de fournir le champ variable correspondant. C'est une question qu'il faudra examiner de plus près.

CHAPITRE IV

LE CHAMP DE L'EXCITATEUR DE HERTZ.
HERTZ. — K. PEARSON ET A. LEE

328. Doublet périodique de Hertz. — Etudions maintenant le champ produit par un doublet périodique, d'abord sans amortissement, d'après Hertz, ensuite avec un amortissement assez considérable, d'après K. Pearson et A. Lee.

Dans les équations du chapitre précédent, posons

$$\mathcal{F}(\Omega' t - r) = -\mathcal{E} \sin \frac{2\pi}{L}(\Omega' t - r);$$

en appelant L la longueur d'onde. Le flux de force électrique Q est alors

$$Q = \mathcal{E}\left[\frac{2\pi}{L}\cos\frac{2\pi}{L}(\Omega' t - r) + \frac{\sin\frac{2\pi}{L}(\Omega' t - r)}{r}\right]\frac{r^2 - z^2}{r^2}.$$

Le doublet a pour moment $-\mathcal{F}(\Omega' t)$ à chaque instant.

Il a donc le moment $+\mathcal{E}$ aux époques $\left(\frac{1}{4} + n\right)\frac{L}{\Omega'}$, ou $\frac{T}{4} + nT$ et $-\mathcal{E}$ aux époques $\left(\frac{3}{4} + n\right)\frac{L}{\Omega'}$ ou $\frac{3T}{4} + nT$.

Les caractères généraux de la distribution de la force électrique, décrits au chapitre précédent, peuvent être complétés par le tracé des lignes de force au voisinage immédiat du doublet, là où elles s'écartent notablement de circonférences centrées sur le doublet.

A une époque donnée t pour trouver les coordonnées polaires r, et λ de divers points de la courbe $Q = C$, Hertz partage arbitrairement

C en deux facteurs, l'un plus petit que 1, l'autre plus grand que C; regardant le premier comme égal à $\frac{r^2 - z^2}{r^2}$ ou $\cos^2\lambda$, on en déduit λ; regardant le second comme égal au facteur en r, de Q, on en déduit facilement la valeur de r, au moyen d'une courbe auxiliaire qui donne la valeur de la parenthèse en fonction de r. Hertz a effectué ainsi le tracé des courbes relatives aux époques o, $\frac{T}{8}$, $\frac{2T}{8}$, $\frac{3T}{8}$. Le doublet étant périodique pur, ces courbes se reproduisent toutes les demies périodes.

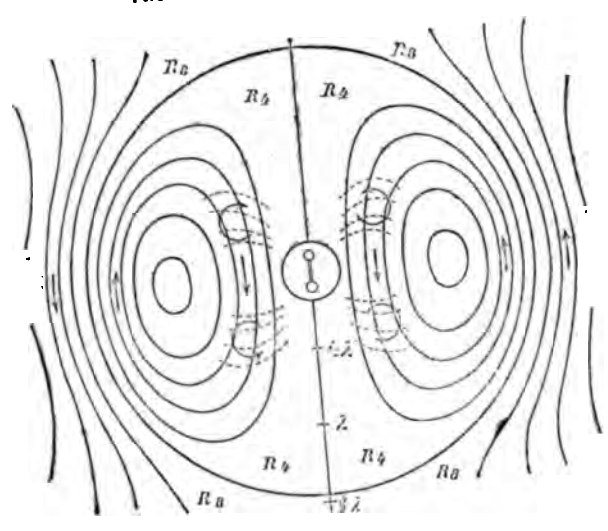
329. — A l'époque zéro, le courant est maximum ; les charges sont nulles ; aucune ligne de force ne vient passer par l'oscillateur. Au voisinage immédiat de l'oscillateur, la force est opposée au courant; à une distance voisine de $\frac{3L}{8}$ dans le plan équatorial elle devient de même sens que le courant central, puis se renverse de nouveau, à une distance un peu supérieure à $\frac{3L}{4}$, et ainsi de suite par zônes de $\frac{L}{2}$ à peu près.

Le courant charge rapidement les extrémités de l'élément, et le doublet acquiert un moment positif. La ligne méridienne circulaire de flux zéro se sépare de l'origine, grandit et se gonfle, pendant qu'à son intérieur grandissent des lignes de force de plus en plus nombreuses et étendues, tangentes au doublet à l'origine. Les autres lignes de force déjà émises s'éloignent.

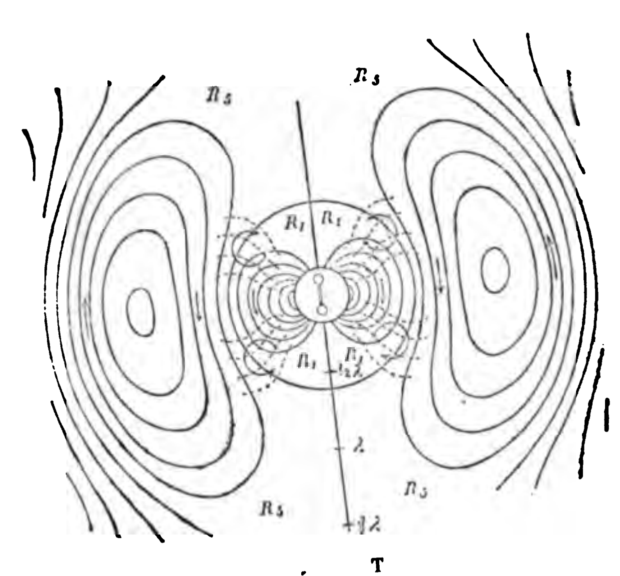
330. — C'est ce qu'on voit sur les figures suivantes. A l'époque $\frac{1}{8}\frac{L}{\Omega'} = \frac{T}{8}$, le doublet est en pleine croissance, le courant diminue.

A l'époque $\frac{T}{4}$, le doublet est maximum, le courant est nul.

Le courant se renverse ensuite ; le doublet décroît, les lignes de force qui se sont peu avancées rétrogradent vers le doublet ; celles qui ont été le plus loin s'étranglent et se divisent en deux parties, l'une qui revient vers le doublet, l'autre définitivement émise qui s'en éloigne, comme le montre la figure pour l'époque $\frac{3}{8}$ T. Enfin après une demie période on revient à la première figure, dans laquelle

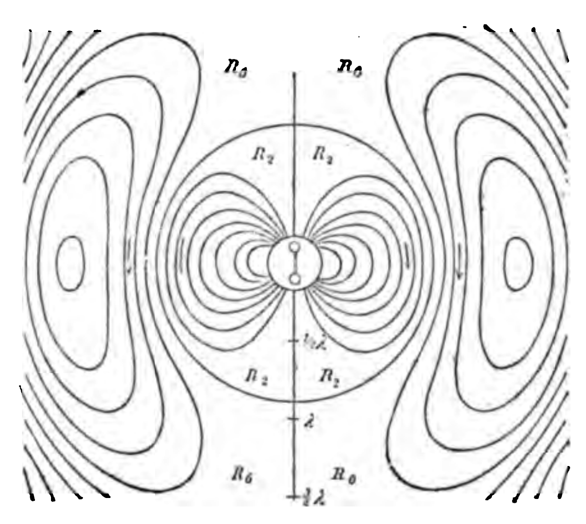


Époques 0 et $\frac{T}{2}$

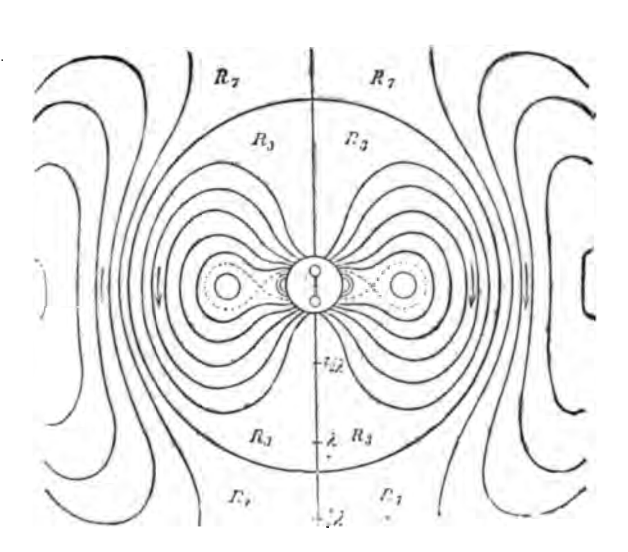


Époque $\frac{T}{8}$

Dans ces figures, reproduction de celles de Hertz, λ désigne la demie longueur d'onde, $\frac{1}{2}$ L.



Époque $\frac{2T}{8}$



Epoque T $\frac{3T}{8}$

Dans ces figures, reproduction de celles de Hertz, λ désigne la demie longueur d'onde, $\frac{1}{2}$ L.

il faut seulement renverser le sens des flèches de courant et de force électrique.

331. Sectionnement des lignes de force. — Tels sont les résultats généraux de la discussion de Hertz ; il est intéressant d'entrer un peu plus dans le détail.

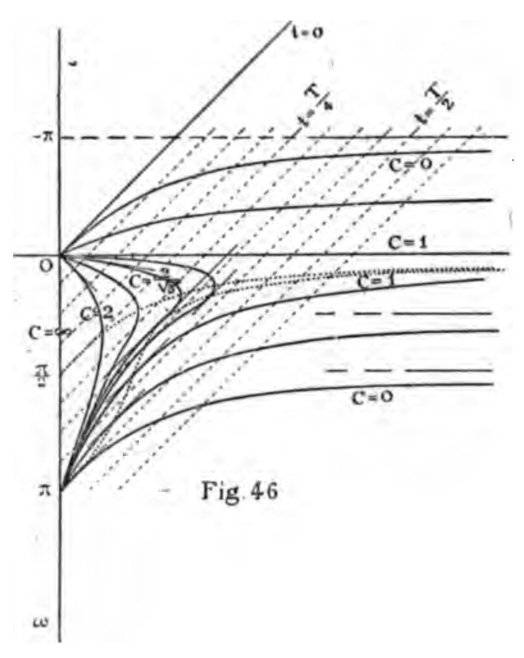


Fig. 46

Posons, pour simplifier l'écriture

(1)
$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{2\pi}{L}\, r, \qquad \omega = \frac{2\pi}{L}\,(\Omega' t - r) \\ C &= \frac{L}{2\pi\mathcal{E}}\,\frac{Q}{\cos^2\lambda}. \end{aligned}\right.$$

L'équation d'une ligne de flux est

(2)
$$\cos\omega + \frac{1}{x}\sin\omega = C.$$

Pour une même ligne de flux, C croît de $\frac{L}{2\pi\mathcal{E}}$ Q à l'équateur, jusqu'à l'infini pour les pôles.

L'équation (2) donne

$$(3) \qquad x = \frac{\sin \omega}{C - \cos \omega}.$$

Dans la figure 46, on a pris x pour abcisse et ω pour ordonnée vers le bas, et on a tracé les courbes $C = cte$.

Ces courbes font connaître le déplacement radial de la ligne de flux C, en fonction de ω, qui représente l'excès du temps réellement écoulé sur celui qu'aurait exigé une propagation uniforme à la vitesse Ω'. Sur ce graphique les lignes isochrones sont les lignes, à 45°, $\omega + x = \text{cte}$.

Toute la partie utile du graphique est comprise dans l'angle de 135° du côté $x > o$, $\quad \omega + x > o$.

332. — Sur l'équation (1) on remarque que pour toute valeur finie de C, à $x = o$ correspond $\sin \omega = o$, et par conséquent $\omega + x = \omega = n\pi$: *L'émission des lignes de flux par le doublet se fait, pour toutes, simultanément,* aux époques o, T, 2T,..... L'absorption des lignes de flux positif et l'émission des lignes de flux négatif, se fait *à la fois* aux époques $\frac{T}{2}$, $\frac{3T}{2}$,.....

Pour $C = o$, on a

$$x = -\operatorname{tg} \omega$$

x devient infini pour $\omega = -\frac{\pi}{2}$; à grande distance, la ligne de flux a une avance d'un quart de longueur d'onde sur la propagation uniforme.

Pour $C < 1$, les lignes de flux vont encore à distance infinie : et leur avance $\frac{L}{2\pi}$ *arc cos* C, est comprise entre $\frac{T}{4}$ et $\frac{T}{2}$.

Mais pour $C > 1$, le parcours est limité, puisque le dénominateur reste fini ; la distance maximum est atteinte lorsque $\frac{\partial r}{\partial t}$ devient nul. Or on a

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \Omega' \left(\frac{\partial t}{\partial r}\right) - 1.$$

Le maximum a donc lieu lorsque $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ est infini.

Formons $\frac{\partial \omega}{\partial x}$, et éliminons x, il vient

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{(C - \cos \omega)^2}{C \cos \omega - 1}.$$

La distance maximum est atteinte pour

$$\cos \omega_M = \frac{1}{C}$$

et sa valeur est

$$x_M = \frac{1}{\sqrt{C^2 - 1}} = \operatorname{cotg} \omega_M.$$

Ainsi toutes les lignes dont le flux est supérieur à $\frac{1}{C}$ ou $\frac{2\pi\mathcal{E}}{L} \cos^2 \lambda$ n'ont qu'un parcours limité. Près de l'axe polaire, presqu'aucune ligne de flux ne va jusqu'à l'infini. A l'équateur, les lignes de flux supérieur à $\frac{2\pi\mathcal{E}}{L}$ vont seules à l'infini.

333. — La ligne $C = 1$, qui sépare les deux groupes de lignes de flux, émises ou retenues, a pour équation

$$x = \frac{\sin \omega}{1 - \cos \omega} = \operatorname{cotg} \left(\frac{\omega}{2}\right).$$

Au départ, pour $\omega = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ avec $x = 0$, on a

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_0 = C - 1,$$

d'où le tableau suivant

$C =$	0	1	1,156	2	∞
$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_0 =$	-1	0	0,156	1	∞.

Les courbes qui vont à l'infini partent de l'origine dans l'angle compris entre la ligne oblique $t = 0$, et $\omega = 0$; celles qui restent à distance finie partent de l'origine dans l'angle droit des axes.

Au retour, pour $\omega = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$ on a

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_\pi = -(C + 1)$$

$C =$	0	1	1,156	2	∞
$\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)_\pi =$	-1	-2	$-2,156$	-3	$-\infty$

334. — La relation générale entre $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ et cos ω, est une relation hyperbolique, qui peut présenter deux formes, suivant que C est plus petit ou plus grand que 1.

Dans le premier cas, $C < 1$, (fig. 47) quand cos ω croît de — 1 à + 1, $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ croît de — $(1 + C)$, à zéro pour $\cos \omega = C$, c'est-à-dire, d'après l'équation (1) n° **331**, pour l'asymptote de chaque

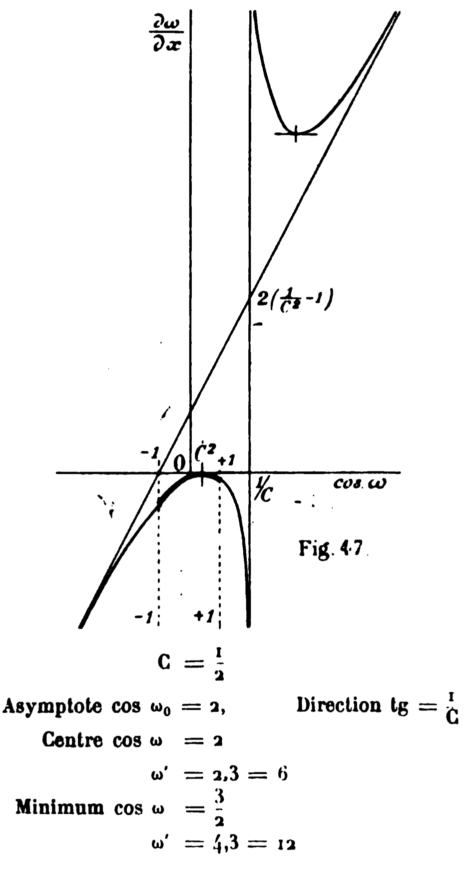


Fig. 47

courbe C (fig. 46). Au delà x devient négatif, et la courbe est inutile.

Pour C compris entre 1 et 2, $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ croît, passe par un maximum,

décroit indéfiniment, puis redevient infini positif et continue à décroître :

$\cos\omega = -1$	$\frac{2}{C} - C$	0	$\frac{1}{C}$		1
$\frac{\partial\omega}{\partial x} = -(1+C)$	$4\left(\frac{1}{C^2} - 1\right)$	$-C^2$	$-\infty, +\infty$		$C-1$

Au maximum correspond un point d'inflexion.

Pour $C = 2$ la tangente au point d'inflexion, $\cos\omega = -1$, est

$$\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right) = -3$$

l'x_M maximum est 0,587... avec $\cos\omega_M = \frac{1}{2}$, $\omega_M = 60°$.

Pour C supérieur à 2, il n'y a pas de maximum ; la décroissance est continue ; la courbe est entièrement concave vers le bas.

335. — Pour suivre la propagation, il faut tracer les droites isochrones, et voir comment elles coupent les lignes C, (fig. 46), et en particulier si elles les touchent, ce qui arrive lorsque $\frac{\partial\omega}{\partial x}$ est égal à -1. Les points de contact sont alors déterminés pour chaque valeur de C par l'équation

$$\frac{(C - \cos\omega)^2}{C\cos\omega - 1} = -1$$

ou

$$\cos\omega = \frac{C}{2} \pm \sqrt{1 - \frac{3}{4}C^2}.$$

Pour toute valeur de C comprise entre o et 1, le signe + donne une valeur de $\cos\omega$ supérieure à 1, inadmissible ; il n'y a qu'un seul point de contact, qui part de $\omega = \pi$ $(x = o)$ pour $C = o$ et recule vers $\omega = \frac{\pi}{2}$, $(x = 1)$ pour $C = 1$.

Pour $C > 1$, ce point de contact continue à reculer ; un second point de contact apparaît à l'infini, avance à la rencontre du premier en partant de $\omega = o$ $(x = \infty)$: enfin pour $C = \frac{2}{\sqrt{3}}$, les deux points se confondent, avec $\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ou $\omega = 0{,}956$ environ 54° 45',

($x = \sqrt{2}$). Tout point de contact disparaît pour les valeurs de C supérieures à $\frac{2}{\sqrt{3}} = 1,156$.

Le lieu de ces points de contact est la courbe à un point d'inflexion

$$x = \frac{\cot g\ \omega}{2} + \sqrt{\frac{\cot^4 \omega}{4} + 1}$$

tracée en pointillé (fig. 46).

Le lieu des sommets

$$x_M = \cot g\ \omega_M$$

est également tracé en pointillé (fig. 46).

336. — Il suffit maintenant de se reporter aux lignes isochrones de la figure 46 pour suivre la marche des lignes de flux. Au temps o, toutes les lignes de flux sont émises à la fois, et quittent la source, d'autant moins vite que C est plus grand. Elles se propagent les unes derrière les autres, en se séparant de plus en plus.

Les lignes de grand flux, $C > \frac{2}{\sqrt{3}}$, après avoir avancé plus ou moins loin $\left(x_M < \sqrt{3},\ r < \frac{L}{2\pi}\sqrt{3}\right)$ reviennent lentement vers la source.

Sur l'équateur, les lignes de flux moyen, $1 < C < \frac{2}{\sqrt{3}}$, avancent à partir de la source, puis à un certain moment apparaissent à un point intermédiaire $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} = -1\right)$, où elles se dédoublent; une des deux revient vers la source, l'autre avance comme la première. La première continue son mouvement en avant, atteint une distance maximum (fig. 48) puis recule, et disparait au moment où elle rejoint celle qui la suivait $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} = -1\right)$.

Ces mouvements dans le plan de l'équateur paraîtront plus clairs après que nous aurons décrit les formes successives des méridiennes de ces lignes de flux.

Enfin les lignes de flux faible $C < 1$, font comme les précédentes, leur apparition en un point moyen $\left(\frac{\partial \omega}{\partial x} = -1\right)$, d'où elles four-

nissent deux branches, l'une émise, l'autre régressive ; mais la branche émise continue jusqu'à l'infini.

337. — Pour déduire du graphique précédent (fig. 46) la forme des lignes de flux à une époque donnée, il suffit de se rappeler que le flux est égal à $C \cos^2 \lambda$. Donc en suivant les valeurs de C sur une isochrone, depuis $x = o$, on en déduit les latitudes pour une même ligne de force. Quand les valeurs de C croissent, la latitude diminue ; elle augmente au contraire si les valeurs de C décroissent ; un changement de sens de variation de C indique que la ligne de flux est tangente au rayon. Cela permet de figurer quelques lignes de flux, à des époques intéressantes, voisines de $\frac{3T}{8}$. (*Planche 1*).

A une même époque tous les points de contact des diverses lignes de force avec des rayons sont à la même distance de la source.

338. — C'est à une même distance de la source $\left(1{,}414 \frac{L}{2\pi}\right)$, et à une même époque $\left((0{,}956 + 1{,}414)\frac{T}{2\pi} = 2{,}37 \frac{T}{2\pi}\right)$ qu'apparaît, sur toutes les lignes de flux inférieur à $1{,}156 \frac{2\pi\delta}{L}$, un point d'inflexion, ayant une tangente radiale, premier signe de la séparation d'un anneau indépendant.

Toutes les lignes de flux inférieur à $1{,}156 \frac{2\pi\delta}{L}$ se coupent donc à

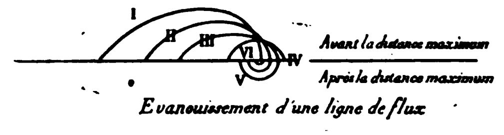


Fig. 48

une distance inférieure à $1{,}414 \frac{L}{2\pi}$, et émettent un anneau qui se propage d'autant plus loin que le flux est plus faible, mais qui finit par s'évanouir à grande distance, si le flux est supérieur à $\frac{2\pi\delta}{L}$, tandis qu'il se propage indéfiniment si le flux est inférieur à $\frac{2\pi\delta}{L}$.

Le mode d'évanouissement d'un anneau de flux est représenté dans la figure 48, par les positions successives, I, II.., VI, de ses lignes méridiennes, qui se contractent, atteignent une distance maximum sur l'équateur, puis se resserrant de plus en plus, finissent par se réduire à une ligne équatoriale circulaire (un point sur la figure) en arrière de la distance maxima.

339. Propagation d'une phase quelconque. — Aux petites distances, on peut avoir à considérer séparément la propagation d'une quantité quelconque. Au lieu de chercher les conditions de propagation des lignes de force $Q = cte$, nous pouvons chercher celles de la propagation d'une phase déterminée de Q : nous pouvons mettre pour cela Q sous la forme

$$Q = \mathfrak{R} \,.\, \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{L}\right) + \varphi \right\}$$

$\mathfrak{R}$ étant une fonction de r, et φ étant défini par $\operatorname{tg} \varphi = 2\pi \frac{r}{\lambda}$.

La loi de propagation d'une phase déterminée est

$$\frac{t}{T} - \frac{r}{L} + \frac{\varphi}{2\pi} = \text{constante}.$$

Pour avoir la vitesse de propagation, dérivons cette équation par rapport à t,

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{L}\frac{dr}{dt} + \frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial t} = 0.$$

En résolvant

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{T}\frac{1}{\frac{1}{L} - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}}.$$

Ce résultat est indépendant de t : sur une même sphère, à toute époque, les phases qui passent se propagent avec la même vitesse.

Remarquons d'ailleurs que ce résultat ne dépend pas de la forme particulière de la fonction $\mathfrak{F}$; si on prend, par exemple

$$\mathfrak{F} = e^{-\theta\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{L}\right)} \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{L}\right)$$

$\mathcal{R}$ et φ sont changés, mais φ est une fonction de r seul et l'on conserve ce caractère que $\frac{dr}{dt}$ ne dépend que de r.

Ce caractère se conserve encore pour les phases des forces électriques et magnétiques.

340. Doublet amorti de Pearson et Lee. — Les résultats précédents changent notablement si, au lieu d'une fonction périodique simple on prend une fonction amortie : ce cas a été étudié par K. Pearson et A. Lee (*Philosophical Transactions*, 1901, vol. 193) qui ont pris

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}e^{-\theta\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{L}\right)}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{L}\right),$$

de sorte que dans le voisinage immédiat de l'oscillateur la fonction se réduit à

$$\mathcal{F} = \mathcal{E}e^{-\theta\frac{t}{T}}\sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

Par conséquent le moment électrique initial de l'oscillateur est nul ; mais la vitesse de variation est différente de o ; c'est-à-dire que l'oscillateur qui est d'abord à un potentiel uniforme reçoit à l'origine du temps une impulsion brusque.

Les résultats du calcul sont les suivants :

La forme des lignes de force est donnée par

$$Q = -\mathcal{E}\cos^2\lambda\, e^{-\theta\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{L}\right)}\left\{\left(\frac{1}{r}-\frac{\theta}{L}\right)\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{L}\right)+\frac{2\pi}{L}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{L}\right)\right\}.$$

Les lignes de force $Q = o$ sont alors données par la condition

$$\text{cotg}\, 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r}{L}\right) = -\frac{\frac{1}{r}-\frac{\theta}{L}}{\frac{2\pi}{L}}.$$

341. — La forme de ces surfaces est grossièrement indiquée par les courbes suivantes (fig. 49) qui donnent la méridienne des sur-

faces pour des valeurs de Q correspondant à des intensités relatives du champ égales respectivement à

50 30 10 1 0.

Ces courbes sont représentées aux époques $\frac{T}{4}$ et $\frac{3T}{4}$.

Les courbes qui se trouvaient dans la première figure entre l'oscillateur et la première sphère $Q = o$, se sont propagées et se trouvent dans la seconde figure entre deux sphères pour lesquelles $Q = o$;

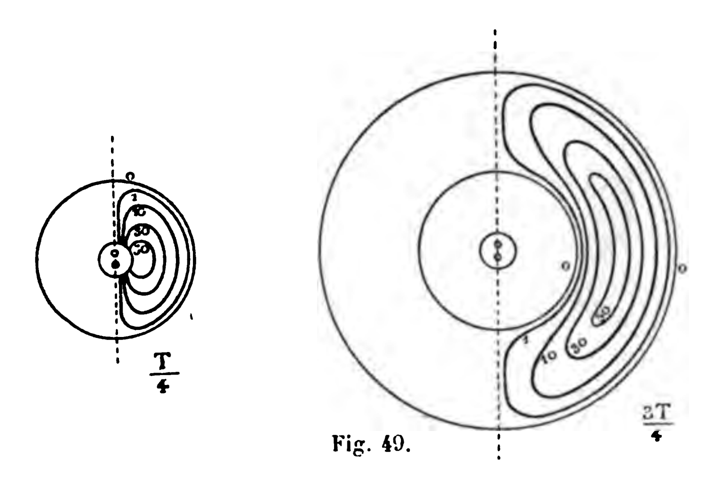


Fig. 49.

elles ont été remplacées entre la sphère intérieure et l'oscillateur par des courbes correspondant aux valeurs négatives de l'intensité, qui ne sont pas tout-à-fait identiques à celles de la première figure à cause de l'amortissement.

La forme des surfaces $Q =$ constante est très différente de celles de Hertz et par suite leur vitesse de propagation est profondément modifiée.

Les planches II, III, IV, à la fin du volume, sont l'exacte reproduction de quelques unes des planches de Pearson et Lee. Elles montrent les variations pendant la *première période* (pl. II), pendant la troisième période (pl. III) et pendant la cinquième période (pl. IV).

341. Avance à l'émission. — A une époque déterminée, pour r

très petit, on a à peu près le même phénomène que dans le cas où s'était placé Hertz, c'est-à-dire, la distribution électrostatique des lignes de force.

Pour r très grand, la cotangente qui définit la ligne $Q = o$, prend la valeur finie

$$\cotg 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{L}\right) = \frac{\theta}{2\pi};$$

quand l'amortissement est nul, on a

$$\cotg = o \qquad 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{L}\right) = n\pi + \frac{\pi}{2}$$

et les distances des diverses surfaces $Q = o$, sont données par

$$r = \Omega\left(t - n\frac{T}{2} - \frac{T}{4}\right);$$

Quand l'amortissement est infini on a simplement

$$r = \Omega\left(t - n\frac{T}{2}\right).$$

Enfin quand l'amortissement est fini on trouve

$$r = \Omega\left(t - n\frac{T}{2} - \varepsilon\frac{T}{4}\right),$$

ε étant plus petir que 1.

Ainsi l'avance $\frac{T}{4}$ qui se produisait pour une source périodique sans amortissement, diminue quand il y a un amortissement et tend vers o quand cet amortissement devient infini (choc brusque instantané).

343. Propagation des forces électrique et magnétique. — La force électrique peut être considérée comme résultant.

1° d'une composante E_u parallèle à l'oscillateur.

2° d'une composante E_t perpendiculaire au rayon vecteur et située dans le plan méridien.

Enfin nous aurons à considérer la force magnétique M qui est perpendiculaire au plan méridien.

En posant

$$A = \mathcal{E} e^{-\theta\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{L}\right)}$$

$$\omega = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{L}\right)$$

ces forces ont pour expression

$$E_a = A \frac{1}{r} \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{\theta}{L}\right) \sin\omega + \frac{2\pi}{L}\cos\omega\right]$$

$$E_t = A\cos\lambda \left[\left(\frac{3}{r^3} - \frac{3\theta}{Lr^2} + \frac{\theta^2 - 4\pi^2}{L^2 r}\right)\sin\omega + \left(\frac{6\pi}{Lr^2} - \frac{4\pi\theta}{L^2 r}\right)\cos\omega\right]$$

$$M = -A\frac{\cos\lambda}{\Omega^2 r}\left[\left(-\frac{\theta}{rT} + \frac{\theta^2 - 4\pi^2}{LT}\right)\sin\omega + \left(\frac{2\pi}{rT} - \frac{4\pi\theta}{LT}\right)\cos\omega\right].$$

Ces expressions contiennent, même lorsque θ est nul, des termes en

$$\frac{1}{r^3}, \quad \frac{1}{r^2}, \quad \frac{1}{r}.$$

Aux grandes distances les seuls termes importants sont ceux qui ont en dénominateur la plus petite puissance r ; tandis qu'à petite distance, où les différents termes sont du même ordre, la complication reste considérable.

Quand r est grand, E_t et M se réduisent à

$$E_t = A\frac{\cos\lambda}{r}\left[\frac{\theta^2 - 4\pi^2}{L^2}\sin\omega - \frac{4\pi\theta}{L^2}\cos\omega\right]$$

$$M = -A\frac{\cos\lambda}{\Omega^2 r}\left[\frac{\theta^2 - 4\pi^2}{LT}\sin\omega - \frac{4\pi\theta}{LT}\cos\omega\right].$$

Ces deux forces ont donc exactement la même phase ; elles varient en raison inverse de r.

Quant à E_a, elle varie en raison inverse de r^2 et devient rapidement négligeable par rapport à E_t, sauf au voisinage immédiat de l'axe polaire.

344. Front de l'onde. — Au front de l'onde les trois forces considérées n'ont pas une valeur nulle : supposons qu'à l'instant initial tout soit en équilibre et que l'oscillateur ne possède aucune charge, mais qu'il reçoive une impulsion brusque. Alors à l'instant t, pour $r > \Omega t$ le champ reste nul, mais pour $r = \Omega t$ on a

$$\sin\omega = 0 \qquad \cos\omega = 1.$$

Les trois composantes qui étaient nulles prennent brusquement une valeur finie qui se propage avec la vitesse Ω : ces trois composantes débutent avec une phase variable suivant la distance, puisque les coefficients de *sin* ω et de *cos* ω dépendent eux-mêmes de la distance.

A grande distance, les valeurs initiales de E_t et M, qui seules subsistent, sont $-\mathcal{E}\frac{\cos\lambda}{r}\cdot\frac{4\pi\theta}{L^2}$, et $+\frac{\mathcal{E}\cos\lambda}{\Omega r}\frac{4\pi\theta}{L^2}$.

345. Propagation d'une phase déterminée. — La vitesse de propagation d'une phase déterminée subit des variations singulières. Quelle que soit la distance, cette vitesse $\frac{dx}{dt}$ est la même pour la composante électrique E_a et pour la force magnétique M : sa valeur est

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_a = \Omega\left(1 + \frac{L^2}{4\pi^2 r^2}\frac{1}{1 + \frac{\theta^2}{4\pi^2} - 2\frac{L}{2\pi r}\frac{\theta}{2\pi}}\right).$$

La vitesse de la force électrique transverse E_t a une expression encore plus compliquée

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_t = \Omega\left(1 + \frac{3L^2}{4\pi^2+\theta^2}\frac{(r-r_0)^2 + r_1^2}{r\left[(r-r_0)^3 - r_0 r_1^2\right]}\right)$$

en posant

$$r_0 = L\cdot\frac{2\theta}{4\pi^2+\theta^2} \qquad r_1 = \frac{L}{4\pi^2+\theta^2}\sqrt{12\pi^2-\theta^2}.$$

Lorsque θ est infini, ces formules nous donnent une vitesse égale à celle de la lumière, quelle que soit la phase; c'est le cas d'un choc.

Lorsque θ est nul, c'est-à-dire pour le doublet de Hertz, ces formules deviennent

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_a = \Omega\left(1 + \frac{L^2}{4\pi^2 r^2}\right),$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_t = \Omega\left(1 + \frac{3L^2}{4\pi^2 r^2} + \frac{9L^4}{16\pi^4 r^4}\right);$$

ces vitesses de propagation, inégales, décroissent de l'infini à Ω, à mesure que la distance augmente, sans jamais cesser d'être positives.

346. — Lorsque l'amortissement est fini, l'étude de ces formules

conduit à des résultats très différents de ceux que nous a donnés le doublet périodique de Hertz.

A) *Force magnétique* M, *et électrique axiale* E_a. — La vitesse est indépendante de la phase, elle ne dépend que de la distance.

Dans la figure 50, on a porté en abcisses les distances à une échelle énorme, en ordonnées les vitesses de propagation $\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_a$ à une échelle prodigieusement petite, puisque la vitesse de la lumière Ω est représentée par un peu plus d'un millimètre ; et néanmoins la distance *bc*, figurée, est encore beaucoup trop petite.

Cette vitesse, infinie négative pour $r = o$, reste négative énorme à toute époque jusqu'à $r = oa$. Alors elle passe brusquement de $-\infty$ à $+\infty$, décroît régulièrement, et tend asymptotiquement vers Ω en lui restant supérieure.

Fig. 50

Si l'on pose

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{\theta}{2\pi}$$

on a

$$ob = ba = \frac{1}{2}\sin^2\chi\,\frac{L}{2\pi}$$

$$bc = -\frac{4\pi^2}{\theta^2}\Omega.$$

Pearson a adopté pour θ la valeur 0,4 ce qui donne sensiblement.

$$\chi = 3^\circ 38' \qquad bc = -225\,\Omega$$

Ce qui est inattendu c'est de trouver près de l'origine des vitesses négatives.

B) *Force électrique transverse* E_t. — On trouve un résultat encore plus compliqué. La courbe a le même caractère général, mais les diverses quantités *oa, ob, bc* ont des valeurs différentes ; en posant

$$q^2 = \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{3}{4\sin^2\chi}} - 1}$$

on a

$$Oa = \sin 2\chi\left(1 + \frac{1}{q^2}\right)\frac{L}{2\pi}$$

$$Ob = \sin 2\chi\left(\frac{0{,}63}{q^2} + 0{,}625 + 0{,}015\,q^4\right)\frac{L}{2\pi}$$

en prenant les premiers termes du développement en série

$$bc = \left(1 - 1{,}59\,\frac{1 - 1{,}19\,q^2}{\sin\chi}\,q^2\right)\Omega.$$

Remarquons que, toujours pour $\theta = 0{,}4$, Oa est beaucoup plus grand que pour la force magnétique, et atteint le dixième de L ; bc est notablement plus petit ; de plus Ob n'est plus la moitié de Oa.

Dans le prolongement de l'axe, l'onde transverse devient négligeable et la force électrique axiale se propage seule dans ce sens.

347. Force électrique totale. — Dans le plan équatorial au contraire l'onde axiale subsiste et accompagne l'onde transverse qui

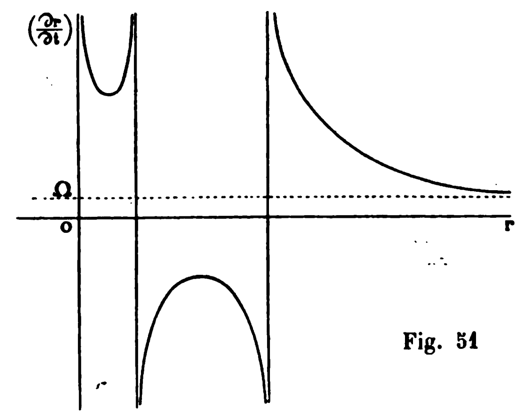


Fig. 51

est maximum. Il en résulte pour la force électrique totale un double

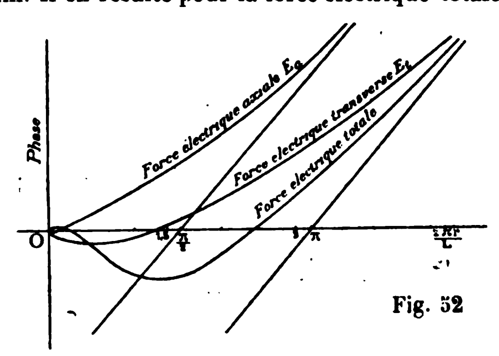


Fig. 52

changement de signe ainsi que le montre la courbe des vitesses en fonction des distances (fig. 51).

On peut encore indiquer la distribution des phases à un instant donné en portant en abscisses les quantités $\frac{2\pi r}{L}$ et en ordonnées les variations de phase, ce qui donne les courbes de la figure 52.

Ainsi quand l'amortissement est considérable il y a dans le voisinage de l'oscillateur de grandes variations de vitesse. M. Pearson rappelle que Hertz a rencontré en se servant de son grand oscillateur des singularités qui l'avaient conduit à penser que la vitesse de propagation peut être différente de la vitesse de la lumière; Hertz avait fait ses mesures à une distance d'environ une longueur d'onde de l'oscillateur, et c'est peut-être ce qui expliquerait aussi d'autres singularités qu'il a rencontrées dans ses expériences.

348. Choix de l'amortissement. — L'amortissement 0,4 que Pearson a adopté, pour tracer les figures et faire la discussion numérique, est celui qu'a trouvé Bjerkness en opérant avec les instruments même de Hertz, mais dans des conditions différentes du rayonnement libre.

L'oscillateur de Hertz était formé de deux plaques, avec des tiges terminées par deux petites boules en regard. Bjerkness a étudié la propagation dans des fils qui partaient de deux grandes plaques placées en face des premières; entre ces fils qui se terminaient librement il intercalait un électromètre idiostatique. La déviation permanente obtenue résulte de l'impulsion directe de l'onde incidente et de celle de l'onde réfléchie. De l'examen de cette déviation pour différentes distances de l'électromètre aux extrémités, on peut déduire l'amortissement de l'onde qui parcourt les fils. Mais les plaques P_1 et P_1' ne doivent pas être trop éloignées de P et P′ pour que l'on ait de la sensibilité; si leur distance est 4 ou 5 centimètres, l'amortissement est de l'ordre indiqué 0,4.

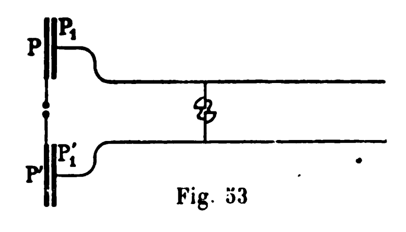


Fig. 53

Mais si cette distance est de plusieurs décimètres l'amortissement est beaucoup plus petit. L'amortissement est dû en effet au rayonne-

ment, c'est-à dire aux communications avec l'extérieur. Comme l'excitateur est court par rapport à sa longueur d'onde $\left(\frac{1}{10}\text{ environ}\right)$ le rayonnement proprement dit dans l'espace est faible (il ne serait intense que si la longueur de l'excitateur était voisine de la demie longueur d'onde). Ce sont les plaques P_1 et P_1' qui donnent par les fils une grande surface de rayonnement : l'amortissement devient d'autant plus intense que les plaques sont plus près. L'amortissement 0,4 que Pearson a adopté est donc beaucoup plus fort que celui de l'excitateur de Hertz rayonnant librement dans l'espace.

349. Mécanisme de la propagation. — Au début la charge est nulle dans l'oscillateur de Pearson, mais l'intensité de courant finie fait naître immédiatement les lignes de force électrostatiques du doublet : celles-ci par leur accroissement brusque équivalent pour les actions magnétiques à de vrais courants et compensent partout au loin l'action du doublet; ce n'est que dans le voisinage qu'il reste une petite action donnant naissance de proche en proche au développement de l'onde émise. Il en résulte qu'on n'observe jamais seul l'élément de courant des théories antérieures à Maxwell, mais l'ensemble de cet élément et des éléments de sens contraire qui l'entourent.

Une autre conséquence de ce mode de propagation est relative à l'allure de la force électrique en un point déterminé. Les deux composantes axiale et transverse ayant des phases différentes, la force n'a pas d'orientation fixée, mais décrit une ellipse, dont le grand axe est orienté d'une façon qui dépend du point considéré, ainsi d'ailleurs que le sens dans lequel l'ellipse est décrite. A grande distance la force électrique devient perpendiculaire au rayon, dans les limites où le terme en *sin* $2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$ n'est pas très petit, sinon le terme en *cosinus* reprend une petite importance. Donc l'ellipse s'oriente de manière que son grand axe soit perpendiculaire au rayon vecteur, et elle s'aplatit de plus en plus, sauf dans le voisinage de l'axe du doublet, où la force, petite d'ailleurs, continue à avoir une orientation variable avec la phase.

350. Difficulté d'un contrôle expérimental. — Ainsi un oscillateur rayonnant librement dans l'éther aurait un amortissement faible ; or la zône intéressante est au voisinage immédiat de l'oscillateur, que la théorie suppose court, de sorte qu'il faudrait, à la fois, un doublet très court et un grand amortissement ; ce qui n'est réalisable que par un fort amortissement ohmique.

On obtiendrait à peu près les conditions initiales de Pearson en excitant l'oscillateur par induction, à la façon de Blondlot.

Soit $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ la force électromotrice induite, l'équation du circuit est

$$\mathrm{CL}\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + \mathrm{CR}\frac{\partial q}{\partial t} + q = \mathrm{C}\frac{\partial\Phi}{\partial t};$$

mais à l'instant initial, à la fin de la variation lente de Φ, q est nul.

Au moment où l'étincelle éclate dans le circuit inducteur, Φ subit un changement brusque Φ_0 ; $\frac{\partial q}{\partial t}$ s'accroît de $\frac{\Phi_0}{\mathrm{L}}$, et q reste nul, du moins si l'étincelle inductrice est soufflée, et s'éteint instantanément. S'il en est ainsi, l'expression de q est celle de Pearson

$$q = \frac{\Phi_0}{\mathrm{L}} \cdot \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\, e^{-\frac{\theta t}{\mathrm{T}}} \sin\frac{2\pi t}{\mathrm{T}}.$$

Mais ces conditions sont difficiles à réaliser et il est peu probable qu'il soit légitime de réduire l'action de l'inducteur à une variation de flux de force magnétique vraiment instantanée Φ_0.

Il paraît donc difficile de réaliser un doublet ayant à l'origine du temps la phase qu'on a supposée, mais si on se rappelle que les vitesses obtenues sont indépendantes de la phase et par suite de l'origine du temps, on voit que rien ne sera changé dans la propagation des phases quand on aura à la place du sinus, un cosinus ou une somme de sinus et de cosinus ; ce qui sera seulement changé, c'est la variation brusque au front de l'onde.

Les valeurs que nous avons données au n° **344**, pour le front de

l'onde, exprimées au moyen des dimensions de l'oscillateur, sont, à grande distance,

$$E_t = -\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}} \cdot \frac{\Phi_0}{r}\frac{1}{\Omega^2}\frac{a}{L}\frac{R}{L}$$

$$M = -\sqrt{\frac{E_t}{\Omega}}$$

L désigne ici le coefficient de self-induction de l'oscillateur.

Ces forces électrique et magnétique instantanées ne dépendent pas de la capacité; elles sont proportionnelles à l'amortissement R : L, de quelque façon qu'il soit réalisé, et en raison inverse du coefficient de self-induction par unité de longueur.

351. Mode d'excitation de Hertz. Nature de l'état initial. — Les appareils au moyen desquels on fait ces expériences marchent le plus souvent à l'aide d'une machine ou d'une bobine; celle-ci charge un condensateur et à un certain moment l'étincelle éclate. A l'instant initial, la charge n'est donc pas nulle mais maximum et il existe entre les deux parties du circuit une différence de potentiel déterminée V.

La période de l'oscillateur est déterminée par sa résistance ohmique et fictive, sa capacité et sa self-induction. On a en appelant q la charge

$$CL\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + CR\frac{\partial q}{\partial t} + q = CV.$$

Or à l'instant initial, avant l'étincelle, on a sensiblement

$$q_0 = CV,$$

car pendant la charge lente $\frac{dq}{dt}$ et $\frac{d^2q}{dt^2}$ sont négligeables. Quand l'étincelle éclate, $\frac{dq}{dt}$ reste nul; mais, comme la force électromotrice V tombe à o, $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$ subit une variation brusque donnée par

$$L\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -V.$$

La force électromotrice restant nulle pendant le passage de l'étincelle, dont la résistance est minime, la solution de l'équation est :

$$q = Ae^{-\theta\frac{t}{T}}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right).$$

On peut calculer les constantes A et φ par les conditions initiales

$$q_0 = \mathrm{CV}, \qquad \frac{dq_0}{dt} = 0.$$

On trouve

$$q = \mathrm{CV}e^{-\theta \frac{t}{\mathrm{T}}}\left(\cos\frac{2\pi t}{\mathrm{T}} + \frac{\theta}{2\pi}\sin 2\pi\frac{t}{\mathrm{T}}\right).$$

Le terme principal est le terme en *cosinus* de sorte qu'on n'est pas dans les conditions de la théorie de Pearson.

Nous reportant aux formules du n° 319, nous trouvons facilement pour le front de l'onde

$$\mathrm{E}_l = -\frac{2z}{r}\, a\, \frac{\mathrm{CV}}{r^3},$$

$$\mathrm{E}_t = \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} \cdot a\left(\frac{\mathrm{CV}}{r^3} - \frac{\Omega^2 \mathrm{V}}{\mathrm{L}r}\right),$$

$$\mathrm{M} = \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\, a\, \frac{\Omega \mathrm{V}}{\mathrm{L}r},$$

en regardant le moment de l'oscillateur comme égal au produit de la charge par la longueur a. A grande distance, il ne reste que

$$\mathrm{E}_t = \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}}\, \Omega^2 \cdot \frac{a}{\mathrm{L}} \cdot \frac{\mathrm{V}}{r}.$$

$$\mathrm{M} = -\frac{\mathrm{E}_t}{\Omega}.$$

Cette force électrique instantanée, au front de l'onde, ne dépend pas de la capacité, et est inversement proportionnelle au coefficient de self-induction de l'excitateur, par unité de longueur. Il en est de même de la force magnétique instantanée,

Mais l'amortissement n'intervient plus ici.

Pour l'action du front de l'onde, l'équation

$$\frac{a}{r\mathrm{L}} = \frac{1}{r}\,\frac{a}{2\log\frac{a}{d}} = \mathrm{cte},$$

en appelant d le diamètre du fil, donnerait une idée de la relation entre le diamètre d et la longueur a d'antennes équivalentes à différentes distances r.

CHAPITRE V

OSCILLATIONS D'UNE SPHÈRE

352. — La forme de corps vibrant dont l'étude est la plus facile, est la forme sphérique, parce que les fonctions nécessaires pour représenter la distribution du champ sont connues depuis longtemps, et ont été étudiées d'une manière approfondie, par Laplace d'abord, et depuis, par beaucoup d'autres.

Rappelons d'abord les propriétés les plus élémentaires de ces fonctions.

Une fonction sphérique solide, ou fonction harmonique V est une fonction qui satisfait à l'équation de Laplace

$$\Delta V = o \tag{1}$$

dans tout l'espace.

Lorsqu'elle est homogène, de degré n, on peut la mettre sous la forme

$$V_n = r^n S_n\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$$

et la fonction S_n, ne dépend plus que des angles directeurs ; elle satisfait à l'équation

$$r^2 \Delta S_n + n(n+1) S_n = o \tag{2}$$

qu'on obtient facilement au moyen des équations connues.

$$\Delta(UV) = U\Delta V + 2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \dots\right) + V\Delta U,$$

$$\Delta f(r) = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r},$$

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z} = nV_n.$$

Lorsqu'on définit la position d'un point sur une sphère par sa latitude $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et sa longitude φ, la fonction S_n prend le nom de fonction de Laplace, et est représentée par Y_n.

Celles des fonctions Y_n qui ne dépendent que de la latitude $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et non de la longitude, ou angle azimuthal, φ ont une importance spéciale ; on les représente avec Legendre, qui les a particulièrement étudiées, par $P_n(\mu)$ en appelant μ le sinus de la latitude λ.

La fonction générale Y_n est

$$Y_n = \sum_{p=0}^{p=n} (A_{n,p} \cos p\varphi + B_{np} \sin p\varphi)\,(1 - \mu^2)^{\frac{p}{2}} \frac{\partial^p . P_n(\mu)}{\partial \mu^p}.$$

353. — Les équations des mouvements vibratoires amortis ou non prennent fréquemment lorsqu'on met en facteur la fonction du temps $e^{\theta t}$, la forme

$$\Delta\Phi - \alpha^2\Phi = 0 \tag{3}$$

α^2 étant un coefficient qui dépend à la fois des propriétés caractéristiques du corps, élasticité, conductibilité, etc., et de la vibration particulière considérée, c'est-à-dire de θ.

Pour des corps de forme sphérique, pleine ou creuse, les fonctions sphériques de degré entier s'introduisent naturellement. Posons

$$\Phi = R_n V_n.$$

R_n étant une fonction de r seulement et substituons dans l'équation (3) ; au moyen des formules rappelées plus haut, on met facilement V_n en facteur, et il reste pour déterminer R_n

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + 2\,\frac{n+1}{r}\,\frac{\partial R_n}{\partial r} - \alpha^2 R_n = 0.$$

On peut donner à l'intégrale de cette équation diverses formes ; j'adopterai la suivante [1]

$$R_n = A_n e^{\alpha r} \frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(\frac{e^{-2\alpha r}}{r^{n+1}}\right) + B_n e^{-\alpha r} \frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(\frac{e^{2\alpha r}}{r^{n+1}}\right).$$

[1] Cf. Brillouin. — Mouvements d'une sphère dans une atmosphère gazeuse ; vibrations propres de l'espace extérieur. *Ann., Ch., Phys.*, II, 1894.

Dans le conducteur, on a

$$\alpha^2 = 4\pi k\theta \left(1 + \frac{K\theta}{4\pi\Omega^2 k}\right),$$

ou, avec toute l'approximation nécessaire en général :

$$\alpha^2 = 4\pi k\theta\,;$$

dans l'isolant, au contraire, on a

$$\alpha^2 = \frac{K}{\Omega^2}\,\theta^2 = \frac{\theta^2}{\Omega'^2}.$$

354. Considérons maintenant une sphère très conductrice dans l'espace isolant indéfini. Si la sphère émet des radiations électriques, sans en absorber, un seul des deux termes de R_n intervient, le premier : en effet, une fois les dérivations effectuées, ce terme est le produit d'un polynome de degré n en $\frac{1}{r}$ par $\frac{A_n}{r^{n+1}}\,e^{-\alpha r}$ et, en prenant

$$\alpha = \frac{\theta}{\Omega'}$$

cela nous donne le terme $e^{\theta\left(t - \frac{r}{\Omega'}\right)}$ purement émissif quel que soit θ.

355. — Adoptant la condition indiquée au chapitre II (nº **309-310**) que la force électrique dans l'isolant soit normale au conducteur, nous pouvons trouver le champ extérieur à la sphère d'une manière indépendante ; nous obtiendrons ensuite ce dernier séparément.

Mettant en évidence le facteur e^{θ} dans les équations d'Ampère et de Faraday, celles-ci deviennent

$$\left(4\pi k + \frac{\theta K}{\Omega^2}\right) E_1 = \frac{\partial M_2}{\partial z} - \frac{\partial M_3}{\partial y},$$

$$\theta M_1 = \frac{\partial E_3}{\partial y} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\,;$$

une quelconque des six grandeurs $E_1, \ldots, M_3$, satisfait à l'équation

$$\Delta \Pi = \alpha^2 \Pi,$$

avec les valeurs de α^2 indiquées plus haut.

356. — La forme du corps permet évidemment l'existence de vibrations dont la force électrique est partout dans le plan méridien, et la force magnétique perpendiculaire au plan méridien. Pour les trouver séparément il faut donner aux équations une forme qui rende simple l'équation à la surface, qui exprime que la force électrique tangentielle est nulle.

Soit M la force magnétique indépendante de la longitude, on a

$$M_1 = - M \sin \varphi$$
$$M_2 = + M \cos \varphi$$
$$M_3 = o$$

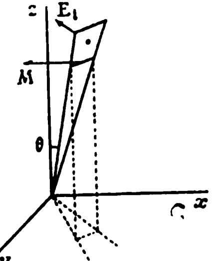


Fig. 54

puis, en appliquant la propriété des flux de courant qu'exprime l'équation d'Ampère [1], au circuit formé de deux rayons vecteurs de même latitude, et de deux circonférences, on obtient

$$r\left(4\pi k + \frac{\theta K}{\Omega^2}\right) E_t = - \frac{\partial (Mr)}{\partial r}$$

où l'on considère M comme une fonction de r et de θ.

357. — C'est donc la fonction M, qu'il faut mettre sous la forme d'un produit de deux facteurs, l'un fonction de r, l'autre de θ, pour écrire l'équation à la surface de la manière la plus simple. Pour cela il faut dans M_1 et M_2 mettre en facteur une fonction Y_n, ce qui donne

$$M_1 = - A \sin \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} r^n e^{\alpha r} + \theta t \frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(\frac{e^{-2\alpha r}}{r^{n+1}}\right),$$

$$M_2 = A \cos \varphi \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} r^n e^{\alpha r} + \theta t \frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(\frac{e^{-2\alpha r}}{r^{n+1}}\right),$$

$$M = A \sqrt{1 - \mu^2} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} r^n e^{\alpha r} + \theta t \frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(\frac{e^{-2\alpha r}}{r^{n+1}}\right),$$

(1) Les trois équations d'Ampère conduisent au même résultat plus péniblement en faisant le changement de coordonnées.

et, la force électrique tangentielle est nulle à la surface de la sphère de rayon a, si l'on a

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n+1}\, e^{\alpha r}\,\frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(\frac{e^{-2\alpha r}}{r^{n+1}}\right)\right) = o, \qquad (r = a).$$

Cette équation détermine α et par conséquent la période et l'amortissement des oscillations de rang n correspondantes.

358. — On trouve facilement la distribution initiale d'électricité correspondante. L'équation d'Ampère pour un élément de surface de la sphère donne la force électrique normale :

$$r^2 \sin\theta \left(4\pi k + \frac{\theta K}{\Omega^2}\right) E_r = -\frac{\partial}{\partial\theta}(Mr\sin\theta)$$

ou, dans l'isolant ($K = o$)

$$r\left(\frac{\theta K}{\Omega^2}\right) E_r = \frac{\partial}{\partial\mu}\left(M\sqrt{1-\mu^2}\right).$$

La densité superficielle à un instant quelconque est donc

$$e_s = \frac{1}{4\pi\theta}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\mu}\left(M\sqrt{1-\mu^2}\right).$$

Si la force électrique normale interne est négligeable, ce qui est approximativement vrai à toute époque, puisqu'elle est de même ordre que la composante tangentielle, et rigoureusement vrai dans l'état d'équilibre initial :

$$(e_s)_0 = -\frac{1}{4\pi}\frac{A.n(n+1)}{\theta}\, r^{n-1}\, e^{\alpha r}\,\frac{\partial^n}{\partial r^n}\left(\frac{e^{-2\alpha r}}{r^{n+1}}\right) P_n(\mu)$$

car l'équation qui définit $P_n(\mu)$ est

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial P_n}{\partial\mu}\right) + n(n+1)\,P_n(\mu) = o$$

comme on le déduit facilement de l'équation générale des Y_n.

359. — Formons maintenant l'équation en α, pour l'oscillation de rang n

$$\left.\frac{e^{-2\alpha r}}{r^{n+1}}\right) = (-1)^n \frac{e^{-2\alpha r}}{r^{2n+1}} \left[\begin{array}{l} (2\alpha r)^n + \frac{n}{1}.(n+1)(2\alpha r)^{n-1} + \dots \\ + \dots \\ + \frac{(n+m+1)!}{(n-m-1)!\,(m+1)!}(2\alpha r)^{n-m-1} \\ + \dots \\ + (2n+1)! \end{array} \right]$$

Puis

$$^{n}e^{-2\alpha a} \left[\begin{array}{l} \left(-\frac{\alpha}{a^n} - \frac{n}{a^{n+1}}\right)\Big[(2\alpha a)^n + n(n+1)(2\alpha a)^{n-1} + \dots \\ \qquad + \frac{(n+m+1)!}{(n-m-1)!\,(m+1)!}(2\alpha a)^{n-(m+1)} \\ \qquad + \dots + (2n+1)!\Big] \\ + \frac{2\alpha}{a^n}\Big[n(2\alpha a)^{n-1} + (n-1)n(n+1)(2\alpha a)^{n-2} + \dots \\ \qquad + \frac{(n+m+1)!}{(n-m-2)!\,(m+1)!}(2\alpha a)^{n-m-2} + \dots\Big] \end{array} \right] = 0.$$

360. — **Pour la première oscillation ($n = 1$) l'équation est**

$$\alpha^2 a^2 + \alpha a + 1 = 0$$

d'où

$$\alpha a = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On a d'ailleurs

$$P_1(\mu) = \mu,$$

$$M = A\sqrt{1-\mu^2}\,(-2)\left(\alpha + \frac{1}{r}\right)\frac{1}{r}\,e^{\alpha(\Omega' t - r)}$$

le facteur de propagation est

$$e^{-\frac{1}{2a}(\Omega' t - r) \pm i\frac{\sqrt{3}}{2a}(\Omega' t - r)}.$$

La période est

$$T = \frac{4\pi a}{\Omega' \sqrt{3}},$$

et le décrément logarithmique

$$\frac{\Omega'}{2a} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{1}{T}.$$

Le rapport de l'amortissement à la fréquence est un nombre, indépendant du rayon de la sphère très conductrice.

Dans une sphère de matière peu conductrice, ce rapport dépendrait du rayon, et l'on pourrait évidemment réaliser des amortissements supérieurs à celui-ci; mais l'amortissement moindre, c'est-à-dire la vibration plus prolongée n'est pas réalisable au moyen de sphères.

361. — De l'expression de la force magnétique on tire

$$E_r = A\, e^{\alpha(\Omega' t - r)} \frac{4\Omega'}{\alpha} \frac{z}{r^3} \left(\alpha + \frac{1}{r}\right)$$

et

$$E_t = -A\, e^{\alpha(\Omega' t - r)} \frac{2\Omega'}{\alpha} \sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} \left(\frac{\alpha^2}{r} + \frac{\alpha}{r^2} + \frac{1}{r^3}\right).$$

Ce champ de force magnétique est exactement celui d'un doublet de moment

$$-\frac{2A}{\Omega'} e^{\alpha\Omega' t}$$

placé à l'origine. Les deux hémisphères sont constamment de signes contraires.

Sur la sphère conductrice, la densité électrique est à tout instant proportionnelle à $\frac{z}{a}$, ou au sinus de latitude; la charge totale sur une couronne $d\lambda$, de hauteur axiale dz, est proportionnelle à $d \sin^2\lambda$, ou à $d(z^2)$. On peut la représenter aussi comme équivalente à une distribution de *moments par unité de longueur*

$$+\frac{3A}{2\Omega'} \frac{z^2 - a^2}{a^2} e^{\alpha\Omega' t}.$$

362. — Donnons maintenant la forme réelle à cette vibration. Le moment du doublet central est

$$-\frac{2}{\Omega'}e^{-\frac{\Omega' t}{2a}}\left(A\cos\Omega'\sqrt{3}\,\frac{t}{2a}-B\sin\Omega'\sqrt{3}\,\frac{t}{2a}\right).$$

La force magnétique correspondante est

$$M=-\frac{2}{r}\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}\,e^{-\frac{\Omega' t-r}{2a}}\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{A}{2a}+\frac{A}{r}-\frac{B\sqrt{3}}{2a}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2a}(\Omega' t-r)\\-\left(-\frac{B}{2a}+\frac{B}{r}+\frac{A\sqrt{3}}{2a}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2a}(\Omega' t-r)\end{array}\right]$$

et les composantes de la force électrique sont

$$E_r=2\frac{\Omega' a}{r^2}\frac{z}{r}e^{-\frac{\Omega' t-r}{2a}}\left[\begin{array}{l}\left(-\frac{2A}{a}-\frac{A}{r}+\frac{B\sqrt{3}}{r}\right)\cos\frac{\sqrt{3}}{2a}(\Omega' t-r)\\+\left(-\frac{2B}{a}+\frac{B}{r}+\frac{A\sqrt{3}}{r}\right)\sin\frac{\sqrt{3}}{2a}(\Omega' t-r)\end{array}\right]$$

$$=2\Omega'\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}\,e^{-\frac{\Omega' t-r}{2a}}\left[\begin{array}{l}\left[-\frac{A+B\sqrt{3}}{2ar}+\frac{A}{r^2}-\frac{A-B\sqrt{3}}{2r^3}a\right]\cos\frac{\sqrt{3}}{2a}(\Omega' t-r)\\-\left[-\frac{B-A\sqrt{3}}{2ar}+\frac{B}{r^2}-\frac{B+A\sqrt{3}}{2r^3}a\right]\sin\frac{\sqrt{3}}{2a}(\Omega' t-r)\end{array}\right]$$

363. — L'amortissement est énorme : l'amplitude diminue dans le rapport $\frac{1}{2}$ pendant le temps qui équivaut au parcours d'un diamètre de la sphère, et au bout d'une période l'amplitude est réduite au $\frac{1}{35}$ environ. Cet amortissement est dû, tout entier, au rayonnement, puisque nous avons supposé la conductibilité de la sphère infinie ; la communication avec l'extérieur se fait en effet par une très grande surface, grâce à la forme sphérique.

Les champs extérieurs sont analogues à ceux du doublet, de Pearson et Lee, avec les caractères particuliers qui résultent du grand amortissement.

La force magnétique perpendiculaire au plan méridien est donnée, dans le champ extérieur, par l'expression

$$M = A\frac{a}{r}\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}\sqrt{1-\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}}\,e^{-\frac{\Omega t - r}{2a}}\cos(\varphi+\delta)$$

avec

$$\varphi = \frac{\Omega t - r}{2a}\sqrt{3}$$

δ étant un angle de phase qui n'est pas déterminé par la période vibratoire seule ; nous ne nous occuperons pas d'ailleurs de fixer l'instant initial, ni de dire comment la vibration a été produite, et nous prendrons la forme la plus simple

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{r-a}{r+a}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}.$$

364. — Quant à la force électrique, située dans le plan méridien, nous la considérons comme résultant d'une composante perpendiculaire au rayon E_t et d'une composante radiale E_r : la première est donnée par

$$E_t = A\Omega\sqrt{1-\frac{z^2}{r^2}}\,\frac{a}{r}\left(1-\frac{a}{r}\right)\sqrt{1-\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}}\,e^{-\frac{\Omega t - r}{2a}}\cos(\varphi+\delta')$$

φ a la même valeur que plus haut, et on a

$$\operatorname{tg}\delta' = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}+\frac{a}{r}}.$$

Ces deux forces M et E_t ont le même caractère général ; elles dépendent toutes deux de la latitude et de la même façon et leur phase est la même à grande distance ; mais à petite distance de la source δ et δ' sont nettement différents : pour $r = a$ on a

$$\delta = 0 \qquad \delta' = \frac{\pi}{6}.$$

Quant à la composante radiale, on a

$$E_r = A\Omega\, 2\,\frac{z}{r}\frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-\frac{a}{r}+\frac{a^2}{r^2}}\,e^{-\frac{\Omega t - r}{2a}}\cos\left(\varphi+\delta-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right).$$

Elle est négligeable au loin devant la composante transverse. A cause de la différence de phase $\frac{2\pi}{6}$ qui existe entre ces deux composantes, la force électrique décrit en réalité une petite ellipse qui est d'autant plus aplatie qu'on est plus loin. Quant à la perte de phase par rapport au mouvement à l'origine elle est intermédiaire entre $\frac{\pi}{2}$ et o, mais beaucoup plus grande que celle calculée par Pearson.

365. — Ainsi la sphère permettrait de réaliser un doublet très amorti grâce au rayonnement; mais, tandis qu'avec l'oscillateur de Hertz, les ondes autres que l'onde fondamentale, sont tout de suite d'ordre beaucoup plus élevé (2 ou 3 octaves), avec la sphère on produira à la fois tous les mouvements qui ont des périodes de même ordre : à moins d'exciter la sphère de façon à produire systématiquement le doublet, on obtiendra facilement les 2e et 3e harmoniques intenses, au lieu que l'excitateur de Hertz, n'émet avec intensité, comme un diapason, que sa période fondamentale.

Pour la seconde oscillation, l'équation est

$$\alpha^3a^3 + 3\alpha^2a^2 + 6\alpha a + 6 = o$$

dont les racines sont

$$\alpha a = -1,6$$

et

$$\alpha a = -0,7 \pm i.\ 1,8\,;$$

l'une est une onde rapidement amortie : l'autre est une oscillation à amortissement rapide et à période plus courte que pour $n = 1$.

La fréquence est 1,4 fois plus grande que celle de l'onde fondamentale (à peu près la quinte et l'amortissement beaucoup plus grand.

Pour le troisième harmonique on a une équation biquadratique qui donne

$$\alpha a = -0,85 \pm 2,76\ i,$$
$$\alpha a = -2,15 \pm 0,8\ i.$$

On trouve ainsi de façon générale des périodes de même ordre que

la période fondamentale, mais avec un amortissement beaucoup plus grand, tandis qu'au contraire, aux amortissements de même ordre, correspondent des périodes beaucoup plus petites.

366. — Ainsi, quand on excite la sphère sans précautions, on crée un état oscillatoire très complexe, surtout au voisinage immédiat de la surface. Il peut y avoir des périodes très peu différentes d'amortissement très inégal, donnant l'illusion d'un amortissement fonction de la distance pour une période unique ; peut-être un phénomène de ce genre se produit-il aussi avec des oscillateurs de forme différente, et est-il intervenu dans les expériences de M. Kiebitz ; je crois pourtant que dans ce cas, ce sont les réactions du résonnateur sur l'oscillateur qui ont joué le rôle principal [1].

367. **Ondes simples**. — Il semble assez difficile d'exciter une onde simple dans la sphère ; il faudrait pour cela produire une distribution centrale simple, comme celle d'une sphère placée dans un champ électrique uniforme, et de plus, détruire ce champ uniforme instantanément, c'est-à-dire en un temps beaucoup plus petit que la période propre de la sphère. Or pour produire un champ uniforme il faudrait placer la sphère entre deux plateaux de rayon plus grand que son diamètre ; et ceux-ci auraient par eux-mêmes une longueur d'onde bien supérieure à celle de la sphère et un amortissement bien plus petit.

S'il s'agit des oscillations du second type, dans lesquelles la sphère équivaut à un doublet magnétique variable, on se heurte à la même difficulté ; on produira bien l'état initial en mettant la sphère dans une bobine parcourue par un courant constant, puis supprimant ce courant. Mais la longueur d'onde du circuit auxiliaire sera bien plus grande que celle de la sphère et l'amortissement bien plus petit.

(1) Kiebitz. — Ueber die electrischen Schwingungen eines stabförmigen Leiters. — *Drude Ann.*, t. V, 1901.

M. Brillouin. — Influence réciproque de deux oscillateurs voisins. — *Ann. Ch. et Phys.*, t. XXVII, 1902.

M. Brillouin. — Influence réciproque de deux oscillateurs voisins. Caractère particulier des discontinuités. — *C. R.*, t. CXXXVI, 1903.

Dans l'un et l'autre cas, on peut séparer les deux phénomènes, en rendant la variation du circuit auxiliaire lente par rapport à celle de la sphère. Il faut seulement faire attention à ce qu'est alors l'état initial.

L'étincelle auxilaire, qui provoque le changement brusque du champ électrique ou magnétique, doit commencer brusquement, et persister pendant un temps supérieur à toute la variation de la sphère ; c'est donc un changement brusque de la vitesse de variation du champ que l'on provoquera, ce qui est évidemment un mode d'excitation peu intense, applicable seulement à des recherches de laboratoire.

Au contraire, pour avoir des oscillations intenses, il faut comme Righi ou Lodge charger la sphère principale par une étincelle émanant d'une sphère beaucoup plus petite. Ces sphères auxiliaires ont un amortissement beaucoup plus grand que la sphère principale et ne troublent pas sensiblement le phénomène lointain ; mais elles apportent toujours une perturbation dans son voisinage immédiat. En outre, la distribution initiale diffère de celle que donnerait un champ uniforme et disparaît d'abord aux pôles de la sphère où l'étincelle jaillit, ce qui produit un état initial d'une extrême complexité.

CHAPITRE VI

OSCILLATIONS DANS UN ELLIPSOÏDE DE RÉVOLUTION AUTOUR DE SON GRAND AXE

368. Équations du champ en coordonnées orthogonales. — Formons les équations de Maxwell en coordonnées orthogonales quelconques s_1, s_2, s_3.

Un élément de longueur ds est donné par :

$$ds^2 = \frac{ds_1^2}{S_1^2} + \frac{ds_2^2}{S_2^2} + \frac{ds_3^2}{S_3^2}.$$

Une ligne obtenue par l'intersection des surfaces $s_2 = cte$, $s_3 = cte$ est normale à la surface $s_1 = cte$.

Ceci posé écrivons d'abord les équations de Faraday : le travail de la force électrique, le long d'un petit circuit est égal à la variation du flux de force magnétique à travers ce circuit (n° **304**). Considérons sur une surface $s_1 = cte$ un petit rectangle dont les côtés sont les intersections de la surface avec des surfaces voisines $s_2 = cte$ $s_3 = cte$.

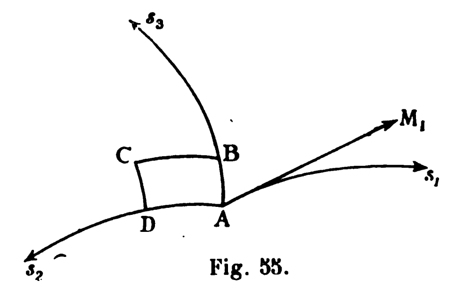


Fig. 55.

Le flux de force est :

$$M_1 \times \text{surface ABCD} = M_1 \frac{ds_2\, ds_3}{S_2\, S_3}$$

d'où la variation de flux

$$\frac{\partial M_1}{\partial t} \frac{ds_2\, ds_3}{S_2 S_3}.$$

Le long du côté AB le travail de la force électrique est $E_3 \frac{ds_3}{S_3}$.

Le long du côté CD le travail de la force électrique est

$$-ds_3 \left[\frac{E_3}{S_3} + \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{E_3}{s_3}\right) ds_2\right].$$

Donc l'ensemble de ces deux côtés donne le terme

$$-\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{E_3}{S_3}\right) ds_2\, ds_3.$$

On trouve de même pour l'ensemble des autres côtés

$$+\frac{\partial}{\partial s_3}\left(\frac{E_2}{S_2}\right) ds_2\, ds_3.$$

Finalement on a comme première équation de Faraday :

(1)
$$\frac{\partial M_1}{\partial t} \frac{1}{S_2 S_3} = \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{E_3}{S_3}\right) - \frac{\partial}{\partial s_3}\left(\frac{E_2}{S_2}\right).$$

Les deux autres équations analogues se déduisent de la précédente par permutation.

Les équations d'Ampère s'obtiennent de la même façon : on trouve en unités électromagnétiques

(2)
$$\left\{4\pi k E_1 + \frac{1}{\Omega^2} \frac{\partial E_1}{\partial t}\right\} \frac{1}{S_2 S_3} = \frac{\partial}{\partial s_3}\left(\frac{M_2}{S_2}\right) - \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{M_3}{S_3}\right).$$

Dans le cas où l'on veut étudier les mouvements électriques à l'intérieur d'un corps dont la surface fait partie d'un système orthogonal, on choisira les surfaces $s_1 = cte$, par exemple, de façon que l'une d'elles soit la surface du corps ; il faudra écrire à la surface les conditions de continuité relatives aux composantes tangentielles M_2 et M_3, E_2 et E_3, et aux composantes normales μM_1, KE_1.

369. Systèmes de révolution. — Dans un système de révolu-

tion tous les phénomènes peuvent être indépendants de l'azimuth s_3. Dans ce cas, les équations deviennent

Équations de Faraday :

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial M_1}{\partial t} = S_2 S_3 \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{E_3}{S_3}\right) \\ \dfrac{\partial M_2}{\partial t} = - S_1 S_3 \dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{E_3}{S_3}\right) \\ \dfrac{\partial M_3}{\partial t} = \left[\dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{E_2}{S_2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{E_1}{S_1}\right)\right] S_1 S_2 \end{cases}$$

Équations d'Ampère :

$$(4)\quad \begin{cases} 4\pi k E_1 + \dfrac{1}{\Omega^2}\dfrac{\partial E_1}{\partial t} = - S_2 S_3 \dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{M_3}{S_3}\right) \\ 4\pi k E_2 + \dfrac{1}{\Omega^2}\dfrac{\partial E_2}{\partial t} = S_3 S_1 \dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{M_3}{S_3}\right) \\ 4\pi k E_3 + \dfrac{1}{\Omega^2}\dfrac{\partial E_3}{\partial t} = S_1 S_2 \left[\dfrac{\partial}{\partial s_2}\left(\dfrac{M_1}{S_1}\right) - \dfrac{\partial}{\partial s_1}\left(\dfrac{M_2}{S_2}\right)\right]. \end{cases}$$

Nous pouvons subdiviser ces six équations en deux groupes contenant l'un $M_1 \quad M_2 \quad E_3$;
l'autre $E_1 \quad E_2 \quad M_3$.

Le premier correspond au système dans lequel la force magnétique est dans le plan méridien et la force électrique tangente au parallèle. Le second correspond au système dans lequel la force électrique est dans le plan méridien et la force magnétique tangente au parallèle ; on pourra, par les circonstances initiales, susciter l'un ou l'autre de ces systèmes.

370. Ellipsoïde allongé de révolution. — Le cas particulier que nous voulons étudier est celui d'un ellipsoïde de révolution autour de l'axe le plus grand ; prenons comme surfaces $s_3 = cte$, le système des plans méridiens ; soit ρ la distance à l'axe, on a

$$s_3 = \theta, \qquad \frac{ds_3}{S_3} = \rho\, d\theta$$

d'où

$$S_3 = \frac{1}{\rho}.$$

Prenons ensuite comme surfaces de révolution orthogonales les ellipsoïdes et les hyperboloïdes de révolution homofocaux, et pour paramètres s_1, s_2, le demi grand axe des ellipsoïdes et le demi axe réel des hyperboloïdes, divisés par la distance focale f. Supposons les deux foyers à la distance f de l'origine sur l'axe des z et soient r, r', les distances d'un point M à ces deux foyers : on aura

$$2s_1 f = r + r'$$
$$2s_2 f = r' - r.$$

Soit α' l'angle FF'M; nous avons dans le triangle FMF'

$$r^2 = r'^2 + 4f^2 - 4fr' \cos\alpha';$$

or $$r' \cos\alpha' = z + f$$

donc $$z = \frac{r'^2 - r^2}{4f} = s_1 s_2 f.$$

D'autre part

$$\rho^2 = r'^2 \sin^2\alpha' = r'^2 - r'^2 \cos^2\alpha'$$

d'où

(5) $$\rho = f\sqrt{(1 - s_2^2)(s_1^2 - 1)}.$$

Fig 56.

Nous aurons ainsi les coordonnées du point M en fonction de s_1 et s_2; il est facile d'obtenir l'arc ds :

$$ds^2 = dz^2 + d\rho^2 = \frac{f^2 ds_1^2}{\frac{s_1^2 - 1}{s_1^2 - s_2^2}} + \frac{f^2 ds_2^2}{\frac{1 - s_2^2}{s_1^2 - s_2^2}}$$

d'où on déduit

(6) $$\begin{cases} S_1 = \dfrac{1}{f}\sqrt{\dfrac{s_1^2 - 1}{s_1^2 - s_2^2}} \\ S_2 = \dfrac{1}{f}\sqrt{\dfrac{1 - s_2^2}{s_1^2 - s_2^2}}. \end{cases}$$

Nous avons ainsi le tableau complet des formules.

371. — Considérons le cas où la force électrique est dans le plan méridien ; E_1 est la composante normale à l'ellipsoïde. Il faut prendre alors les équations en E_1, E_2 et M_3, qui sont pour l'ellipsoïde :

$$
(7)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 4\pi k E_1 + \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial E_1}{\partial t} = -\frac{1}{\rho f}\sqrt{\frac{1-s_2^2}{s_1^2-s_2^2}}\frac{\partial}{\partial s_2}(\rho M_3) \\
& 4\pi k E_2 + \frac{1}{\Omega^2}\frac{\partial E_2}{\partial t} = \frac{1}{\rho f}\sqrt{\frac{s_1^2-1}{s_1^2-s_2^2}}\frac{\partial}{\partial s_1}(\rho M_3) \\
& \frac{\partial M_3}{\partial t} = \frac{1}{f}\frac{\sqrt{(s_1^2-1)(1-s_2^2)}}{s_1^2-s_2^2}\left[\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\sqrt{\frac{s_1^2-s_2^2}{1-s_2^2}}E_2\right)-\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\sqrt{\frac{s_1^2-s_2^2}{s_1^2-1}}E_1\right)\right]
\end{aligned}
\right.
$$

On peut poser

$$(8)\qquad \rho M_3 = A_3,$$

et les équations deviennent, à l'extérieur du conducteur

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial E_1}{\partial t} &= -\frac{\Omega^2}{\rho f}\sqrt{\frac{1-s_2^2}{s_1^2-s_2^2}}\frac{\partial A_3}{\partial s_2} \\
\frac{\partial E_2}{\partial t} &= \frac{\Omega^2}{\rho f}\sqrt{\frac{s_1^2-1}{s_1^2-s_2^2}}\frac{\partial A_3}{\partial s_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Dérivons la troisième équation par rapport à t, et remplaçons $\frac{\partial E_1}{\partial t}$ et $\frac{\partial E_2}{\partial t}$ par les valeurs précédentes, il vient

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{f^2}\frac{\sqrt{(1-s_2^2)(s_1^2-1)}}{s_1^2-s_2^2}\times\left[\frac{1}{1-s_2^2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial s_1^2}+\frac{1}{s_1^2-1}\frac{\partial^2 A_3}{\partial s_2^2}\right].$$

en remarquant que l'expression (5) de ρ donne

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{s_1^2-1}{1-s_2^2}} = \frac{1}{1-s_2^2}\frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{1-s_2^2}{s_1^2-1}} = \frac{1}{s_1^2-1}\frac{1}{f}.$$

Multiplions les deux membres par ρ,

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 A_3}{\partial t^2} = \frac{\Omega^2}{f^2}\left[\frac{s_1^2-1}{s_1^2-s_2^2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial s_1^2}+\frac{1-s_2^2}{s_1^2-s_2^2}\frac{\partial^2 A_3}{\partial s_2^2}\right].$$

Il n'y a pas de difficulté particulière à l'intérieur du conducteur, mais nous n'avons pas besoin des équations dans ce cas, car nous

avons vu que, pour les courtes périodes, la condition de continuité se réduit à ce que la force électrique soit normale à la surface du conducteur.

372. — Posons

$$A_3 = Ae^{-\frac{\theta\Omega t}{f}}, \tag{11}$$

θ étant un nombre réel ou imaginaire. L'équation (70) devient

$$\theta^2 A (s_1^2 - s_2^2) = (s_1^2 - 1)\frac{\partial^2 A}{\partial s_1^2} + (1 - s_2^2)\frac{\partial^2 A}{\partial s_2^2}.$$

En écrivant cette équation sous la forme

$$\left(\theta^2 A - \frac{\partial^2 A}{\partial s_1^2}\right)(s_1^2 - 1) = \left(\theta^2 A - \frac{\partial^2 A}{\partial s_2^2}\right)(s_2^2 - 1),$$

on voit qu'on peut obtenir des solutions simples, telles que A soit le produit de deux fonctions, l'une de s_1 seulement, l'autre de s_2 seulement :

$$A = \mathcal{E}_n(s_1)\,\mathcal{H}_n(s_2), \tag{12}$$

qui satisfont toutes deux à la même équation différentielle

$$(s^2 - 1)\left(\theta^2 U_n - \frac{\partial^2 U_n}{\partial s^2}\right) = -\mathfrak{N}_n U_n,$$

ou

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial s^2} = \left(\theta^2 + \frac{\mathfrak{N}_n}{s^2 - 1}\right) U_n, \tag{13}$$

où $\mathfrak{N}_n$ est une constante arbitraire.

Lorsque U_n représente $\mathcal{E}_n$, s est égal à s_1, et est plus grand que 1.
Lorsque U_n représente $\mathcal{H}_n$, s est égal à s_2, compris entre -1 et 1.

La fonction $\mathcal{E}_n(s_1)$, est constante sur chaque ellipsoïde $s_1 = cte$, mais varie de l'un à l'autre. Dans un espace indéfini extérieur à l'ellipsoïde, elle doit évidemment s'annuler pour les très grandes valeurs de s_1 à peu près comme $\frac{e^{-\theta s_1}}{s_1}$, car s_1 joue à peu près le même rôle que r dans les problèmes sphériques.

La fonction $\mathcal{K}_n(s_2)$ est constante sur chaque hyperboloïde, et définit la distribution électrique à chaque instant sur l'ellipsoïde elle joue le rôle des fonctions de Legendre dans le problème sphérique. Comme l'ellipsoïde est complet, et que l'axe polaire n'est pas une ligne de discontinuité, il faut évidemment que la force magnétique

$$(14) \qquad M_3 = \frac{Ae^{-\frac{\theta\Omega t}{f}}}{\rho} = \frac{1}{f}\frac{\mathcal{E}_n(s_1)\,\mathcal{K}_n(s_2)}{\sqrt{(1-s_2^2)(s_1^2-1)}}\,e^{-\frac{\theta\Omega t}{f}}$$

qui est perpendiculaire au rayon ρ, soit nulle sur l'axe polaire, au moins de l'ordre de $\sqrt{1-s_2^2}$, et par conséquent que $\mathcal{K}(s_2)$ y soit nul au moins comme $1-s_2^2$.

Cette circonstance détermine la constante $\mathfrak{N}_n$ pour chaque valeur de θ.

On a ensuite

$$(15) \qquad \begin{cases} E_1 = \dfrac{\Omega}{\theta f}\dfrac{1}{s_1^2-1}\,\mathcal{E}_n(s_1)\dfrac{\partial}{\partial s_2}\mathcal{K}_n(s_2)\,e^{-\frac{\theta\Omega t}{f}} \\[2ex] E_2 = -\dfrac{\Omega}{\theta f}\dfrac{1}{1-s_2^2}\dfrac{\partial}{\partial s_1}\mathcal{E}_n(s_1).\mathcal{K}_n(s_2)\,e^{-\frac{\theta\Omega t}{f}}. \end{cases}$$

373. Comparaison avec le problème sphérique. — Insistons un peu sur la comparaison avec la sphère, et montrons les analogies et les différences.

Comparons l'expression

$$M_3 = e^{-\frac{\theta\Omega t}{f}}\frac{\mathcal{K}(s_2)}{\sqrt{1-s_2^2}}\frac{\mathcal{E}(s_1)}{\sqrt{s_1^2-1}}\frac{1}{f}$$

à celle que nous avons obtenue pour la sphère

$$M = e^{-\alpha\Omega t}\left(\sqrt{1-\mu^2}\frac{\partial P_n}{\partial\mu}\right)R_n r^n$$

pour des vibrations analogues ; s_2, qui est le cosinus de l'angle de l'asymptote avec l'axe de révolution, correspond à μ ; $s_1 f$ correspond à r.

L'équation en P (n° 358)

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P_n}{\partial\mu}\right] = -n(n+1)P_n(\mu)$$

donne en dérivant

$$(16)\qquad \frac{\partial^2}{\partial\mu^2}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P_n}{\partial\mu}\right] = -\frac{n(n+1)}{1-\mu^2}\cdot(1-\mu^2)\frac{\partial P_n}{\partial\mu}$$

et la fonction qui correspond à $\mathfrak{K}(s_2)$ est $(1-\mu^2)\frac{\partial P_n}{\partial\mu}$. Elle en diffère surtout parce qu'on sait à l'avance, pour P_n, la valeur $[n(n+1)]$ qu'il faut donner à $\mathfrak{N}_n$, et parce que θ^2 n'entre pas dans l'équation en P, pour la sphère.

L'équation en R_n (n° 353)

$$\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + 2\frac{n+1}{r}\frac{\partial R_n}{\partial r} - \alpha^2 R_n = 0$$

devient pour $r^{n+1}R_n$

$$(17)\qquad \frac{\partial^2(r^{n+1}R_n)}{\partial r^2} = \left[\alpha^2 + \frac{n(n+1)}{r^2}\right] r^{n+1}R_n,$$

et c'est la fonction $R_n r^{n+1}$ qui correspond à $\mathfrak{E}(s_1)$.

374. — On pourrait se figurer, par analogie avec d'autres questions qu'une solution simple pour l'ellipsoïde, doit toujours devenir très peu différente à grande distance de la solution simple de même rang pour une sphère ; en un mot, que la forme de la source doit toujours devenir indifférente à grande distance. Cette conclusion serait trop rapide.

L'équation en $\mathfrak{E}$ tend bien, pour s_1 très grand vers la même forme apparente que l'équation en Rr^{n+1} : car elle ne contient pas θ^2 en évidence ; mais on ne sait pas à l'avance quelle est la valeur de $\mathfrak{N}$ en fonction du rang de la solution. C'est seulement si la constante $\mathfrak{N}$ était rigoureusement ou approximativement égale à $n(n+1)$, (n étant un entier) que la solution pour l'ellipsoïde tendrait vers celle relative à la sphère, aux grandes distances.

Or l'équation en $\mathfrak{K}$, qui contient θ^2 et $\mathfrak{N}$ montre que la loi de distribution en latitude, à toute distance, aussi bien grande que petite, reste profondément différente, en général, de celle due à une sphère.

Il est facile d'en saisir la raison en se reportant à l'interprétation physique des équations. Nous avons vu en effet, dans le cas le plus

simple, qu'un doublet ne peut être équivalent qu'à une sphère, lorsqu'il est oscillant avec amortissement convenable, ou à une surface à deux nappes, lorsqu'il est amorti pur, (nos **325-326**); il ne peut donc jamais être équivalent à un ellipsoïde. Ainsi, déjà dans sa forme vibratoire la plus simple, où il n'y a que deux zônes de signe opposé séparées par une seule ligne neutre, l'équateur, un ellipsoïde ne peut pas être remplacé par un seul doublet central; les sources équivalentes pour l'extérieur sont, ou des doublets distribués d'un foyer à l'autre le long de l'axe, ou un ensemble de sources centrales de tous les degrés de complication; et comme ces sources de degré élevé contiennent toutes des termes en $\frac{1}{r}$, la complexité de la distribution en latitude persiste à toute distance.

375. Valeurs limites de $\mathcal{N}$. — Pour déterminer le cas limite, revenons au point de vue mathématique. Les coordonnées elliptiques reviennent aux coordonnées sphériques lorsque f devient nul, $\frac{\theta}{f}$, s_2 et s_1/f restant finis. Dans ce cas l'équation 13 prend en effet la forme des équations 16 ou 17 suivant qu'il s'agit de s_2 ou de s_1/f; la constante $\mathcal{N}$ doit donc être égale dans ce cas à $n(n+1)$ pour le n^e état vibratoire, lorsque l'espace extérieur à la sphère est complètement libre, et comprend par conséquent les deux parties de l'axe polaire. Dans ce cas la valeur limite de $\mathcal{N}_n$ pour θ nul, est donc $n(n+1)$; c'est le premier terme du développement de $\mathcal{N}$ suivant les puissances croissantes de θ.

Dans le cas où l'espace libre autour de la sphère est limité par des cônes entourant l'un ou l'autre des demi-axes polaires, soit d'un milieu conducteur, soit d'un milieu diélectrique différent de celui qui occupe la zône équatoriale, ce ne sont plus les fonctions P_n de rang entier qu'il faudrait employer; dans les équations relatives aux coordonnées sphériques, les n ne seraient plus entiers; il faudrait en déterminer les valeurs par les conditions de continuité à la surface des cônes; la suite des nombres n serait donc fonction des latitudes λ_1, λ_2 de ces deux cônes. Il en serait de même dans les problèmes elliptiques correspondants où les surfaces limites sont les hyperboloïdes

ayant ces mêmes cônes pour cônes asymptotes ; et le premier terme du développement des $\mathfrak{N}_n$ en puissances positives de θ est encore le produit $n(n+1)$ déterminé par le problème sphérique en fonction des deux latitudes limites λ_1, λ_2.

376. Recherche de la fonction $\mathcal{K}(s_1)$. **Méthode de M. Maclaurin.** — Il faut donc avant tout former la fonction $\mathcal{K}(s_2)$. Nous suivrons pour cela, à quelques différences de notation près, la même marche que M. Maclaurin, qui s'est livré à une étude approfondie de cette équation et de celles plus compliquées qui se présentent, lorsque l'azimuth du plan méridien intervient ([1]).

Nous avons vu que la fonction $\mathcal{K}$ doit s'annuler comme $(1-s_2^2)$ sur l'axe polaire ; prenons donc, avec M. Maclaurin, la fonction $\mathcal{K}$ sous la forme

$$\mathcal{K}=(1-s^2)\,y,$$

l'équation 13 devient

$$(18)\qquad (1-s^2)\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}-4s\frac{\partial y}{\partial s}+y(-2+\mathfrak{N}-\theta^2+\theta^2 s^2)=0.$$

Nous pouvons prendre comme intégrales de cette équation soit une série développée suivant les puissances paires de s, soit une série développée suivant les puissances impaires.

377. Série paire. — Posons

$$y=\sum a_{2m}\,s^{2m}$$

([1]) MACLAURIN. — On the Solutions of the equation $(\nabla^2+k^2)\psi=0$ in elliptic coordinates and their physical applications. — *Cambridge Philos. Trans*, 1898-99. — Vol. XVII, p. 41-108. — Section II. Spheroids, p. 79.

Notations :

Maclaurin	—	x	$y(1-x^2)$	λ^2	p.
Texte du livre	—	s	$\mathcal{K}$	$-\theta^2$	$-\theta^2+\mathfrak{N}$.

Le cas particulier qui nous importe est celui de $n=1$ (notations Maclaurin). p. 84.

et substituons dans 18, nous trouvons pour coefficient de s^{2m}, qui doit être nul quelque soit m :

$$(19)\quad (2m+1)(2m+2)a_{2m+2} - \left[(2m+1)(2m+2) - \mathfrak{N} + \theta^2\right]a_{2m} + \theta^2 a_{2m} -$$

Si on prend m égal à -1, et si on choisit a_{-2} nul, cette équation donne, de proche en proche, a_{-4}, a_{-6}, ... tous nuls. On peut donc prendre une série exclusivement formée de puissances positives, et si on choisit a_0 égal à 1, on en déduit

$$(19)'\quad \left\{\begin{array}{ll} a_2 & = + \dfrac{-\mathfrak{N} + \theta^2 + 1.2}{1.2} \\ a_4 & = \dfrac{-\mathfrak{N} + \theta^2 + 3.4}{3.4} a_2 - \dfrac{\theta^2}{3.4} \\ a_6 & = \dfrac{-\mathfrak{N} + \theta^2 + 5.6}{5.6} a_4 - \dfrac{\theta^2}{5.6} a_1 \\ \cdots & \cdots \\ a_{2m+2} & = \dfrac{-\mathfrak{N} + \theta^2 + (2m+1)(2m+2)}{(2m+1)(2m+2)} a_{2m} - \dfrac{\theta^2}{(2m+1)(2m+2)} a_{2m} - \\ \cdots & \cdots \end{array}\right.$$

Le rapport d'un coefficient au précédent est

$$(20)\quad \frac{a_{2m+2}}{a_{2m}} = \frac{-\mathfrak{N} + \theta^2}{(2m+1)(2m+2)} + 1 - \frac{\theta^2}{(2m+1)(2m+2)} \frac{a_{2m-2}}{a_{2m}}$$

378. — Deux cas peuvent se présenter :

1° *Le rapport* $\frac{a_{2m+2}}{a_{2m}}$ *reste fini quand m augmente indéfiniment* ; alors le premier et le dernier terme de droite dans l'équation (20) tendent vers zéro, quand m croit indéfiniment et on a

$$\text{Lim.} \frac{a_{2m+2}}{a_{2m}} = 1.$$

La série est alors sûrement divergente pour s^2 supérieur à 1 ; elle l'est aussi pour $s^2 = 1$, comme on s'en assure en constatant que l'expression $m\left(\frac{a_{2m}}{a_{2m+2}} - 1\right)$ est inférieure à 1.

On a en effet comme valeur approchée

$$\frac{a_{2m+2}}{a_{2m}} = 1 - \frac{\mathfrak{N}}{4m^2}$$

d'où

$$\text{Lim.}\, m\left(\frac{a_{2m}}{a_{2m+2}} - 1\right) = \text{Lim.}\, \frac{\mathfrak{N}}{4m} = 0.$$

Cette première série devenant divergente sur l'axe, quel que soit $\mathfrak{N}$ ne peut donc être de nul usage pour la fonction $\mathcal{H}$ relative aux ellipsoïdes complets.

2° *Le rapport* $\frac{a_{2m+2}}{a_{2m}}$ *tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.* S'il en est ainsi, le second membre de l'équation (20) tend vers zéro; on a par conséquent à la limite

$$\text{Lim.}\, \frac{a_{2m}}{a_{2m-2}} = \frac{\theta^2}{(2m+1)(2m+2)}.$$

La série est alors convergente dans tout l'espace, pour toute valeur réelle ou imaginaire de s, et converge au loin, comme *Cosh.* (θs).

C'est cette série qui convient seule pour former la fonction $\mathcal{H}$ d'un ellipsoïde complet, lorsque celle-ci est paire.

379. Série impaire. — Posons de même

(21) $$y = b_1 s + b_3 s^3 + b_5 s^5 + \ldots + b_{2m-1} s^{2m-1}$$

et substituons dans l'équation (18) il vient

(22) $$2m(2m+1)b_{2m+1} - \left[2m(2m+1) - \mathfrak{N} + \theta^2\right]b_{2m-1} + \theta^2 b_{2m-3} = 0.$$

Cette relation de récurrence conduit aux mêmes conséquences que la précédente.

Lorsque le rapport $\frac{b_{2m+1}}{b_{2m-1}}$ reste fini, sa limite est 1, et la série est divergente pour $s^2 = 1$; elle ne nous est d'aucune utilité.

Lorsque le rapport $\frac{b_{2m+1}}{b_{2m-1}}$ tend vers zéro, pour m indéfiniment croissant, la limite est $\frac{\theta^2}{2m(2m+1)}$ et la série est convergente pour toute valeur de s, et au loin comme *Sinh* (θs).

C'est celle qui convient pour former les fonctions $\mathcal{H}$ impaires d'un ellipsoïde complet.

380. Condition pour que $\frac{a_{2m+2}}{a_{2m}}$ tende vers zéro. — Cette condition relative à la valeur limite nulle du rapport $\frac{a_{2m+2}}{a_m}$ fournit une équation transcendante entre N et θ^2, dont il faut déterminer approximativement les racines (¹).

Nous avons déjà remarqué (nº **375**) que ces valeurs se réduisent à $n(n+1)$, lorsque θ^2 s'annule ; nous admettrons en conséquence qu'elles sont en nombre infini, et qu'elles restent distinctes lorsque θ^2 est différent de zéro quelconque.

En prenant n impair, égal à $2p-1$, on annule le terme indépendant de θ^2 dans le $p^{\text{ième}}$ coefficient a_{2p} ; et tous les coefficients qui suivent ont θ^2 en facteur, mais tous ceux qui précèdent ont un terme constant.

Cette détermination fixe la valeur du terme constant α de tous les coefficients inférieurs à a_{2p} et donne

$$\alpha_{2p-2} = \left[1 - \frac{2p-1.\,2p}{1.\,2}\right]\left[1 - \frac{2p-1.\,2p}{3.\,4}\right]\left[\ldots\right]\left[1 - \frac{2p-1.\,2p}{2p-3.\,2p-2}\right]$$

$$\alpha_{2p-4} = \left[1 - \frac{2p-1.\,2p}{1.\,2}\right]\ldots\left[1 - \frac{2p-1.\,2p}{2p-5.\,2p-4}\right].$$

Cela posé, les formules donnent

$$a_{2p} = \frac{\theta^2}{2p.\,2p-1}\left[a_{2p-2} - a_{2p-4} - a_{2p-2}Q_2\right]$$

en posant

$$\mathfrak{N} = 2p(2p-1) + Q_2\theta^2.$$

Appelons N_2 la partie indépendante de θ^2 dans Q_2, nous aurons

$$a_{2p} = \frac{\theta^2}{2p.\,2p-1}\left[\alpha_{2p-2} - \alpha_{2p-4} - \alpha_{2p-2}N_2\right] + \ldots\theta^4 + \ldots$$

Si maintenant nous déterminons N_2 de manière que a_{2p+2} ait en facteur θ^4, tous les coefficients suivants auront aussi θ^4 en facteur : cela nous donne

$$(23)\quad N_2 = 1 + \frac{(2p-3)(2p-2)}{2p.(2p-1)-(2p-3)(2p-2)} - \frac{(2p.\,2p-1)}{(2p+1)(2p+2)-2p(2p-}$$

(¹) Voir Maclaurin. — *Loc. cit.*, p. 49, p. 59 et suiv., p. 82, p. 84.

381. — Au moyen de cette valeur de N_2, exacte, nouspouvons calculer les termes en θ^2 dans $a_2 \ldots\ldots a_{2p-2}$; le terme en θ^4 dans a_{2p}. Posant

$$\mathfrak{N} = 2p.(2p-1) + N_2\theta^2 + N_4\theta^4 + \ldots\ldots$$

nous pouvons calculer le terme en θ^4 de a_{2p+2}, a_{2p+4} au moyen de N_4 seul. Ecrivant que a_{2p+4} commence par un terme en θ^6, nous déterminerons q_4.

Au moyen de ce N_4, nous déterminerons tous les termes en θ^4 des $a_2 \ldots a_{2p-2}$, et tous les termes en θ^4 de a_{2p}, $a_{2p+4}, \ldots$ Dans les termes en θ^6 de $a_{2p+6} \ldots$ entre en outre N_6, dont nous déterminerons la valeur en écrivant que a_{2p+6} commence par un terme en θ^8.

D'une manière générale, le coefficient N_{2k} de θ^{2k} dans $\mathfrak{N}$ sera déterminé en écrivant que a_{2p+2k} commence par un terme en θ^{2k+2}.

La détermination se fait de même en partant de $\mathfrak{N} = (2p+1)\,2p$, pour la série impaire (21), (22) (n° **379**).

382. — Voici les premières racines, telles que les a calculées M. Maclaurin en suivant une marche différente de la précédente.

1° Série paire :

$$(24) \quad \begin{cases} \mathfrak{N} = 2 + \frac{4}{5}\theta^2 - \frac{4}{7.\,5^3}\theta^4 - \frac{8}{21.\,5^5}\theta^6 + \ldots \\ \mathfrak{N}' = 12 + \frac{8}{15}\theta^2 + \frac{1\,064}{77.\,3^4.\,5^3}\theta^4 + \ldots \\ \mathfrak{N}'' = 30 + \frac{20}{39}\theta^2 + \frac{1\,108}{7.\,3^4.\,13^3}\theta^4 + \ldots \end{cases}$$

2° Série impaire :

$$(25) \quad \begin{cases} \mathfrak{N}' = 6 + \frac{4}{7}\theta^2 - \frac{4}{1\,029}\theta^4 + \frac{8}{33.\,7^5}\theta^6 + \ldots \\ \mathfrak{N}'' = 20 + \frac{40}{77}\theta^2 + \frac{7\,064}{7^3 11^3 13}\theta^4 + \ldots \\ \mathfrak{N}''' = 42 + \frac{28}{55}\theta^2 + \ldots \end{cases}$$

Les racines $\mathfrak{N}$ qui correspondent à la série paire étant différentes de celles qui correspondent à la série impaire, nous avons donc pour

chaque valeur de $\mathfrak{M}$, ainsi déterminée, une intégrale de l'équation 18, finie dans tout le plan; nous l'appellerons y_1.

Pour avoir l'intégrale générale de l'équation 18, relative à cette valeur de $\mathfrak{M}$, il faut en trouver une autre, de parité différente, et qui deviendra infinie pour $s^2 = 1$.

383. Equations entre $\mathfrak{M}$ et θ^2. — Au lieu de procéder de proche en proche, on peut former directement l'équation qui détermine $\mathfrak{M}$ comme je vais le montrer.

Considérons l'équation 13 :

$$(26) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = \left(\theta^2 + \frac{\mathfrak{M}}{s^2 - 1}\right) U$$

et l'équation

$$(27) \qquad \frac{\partial^2 V_n}{\partial s^2} = \frac{n(n+1)}{s^2 - 1} V_n.$$

L'intégrale U développée en série paire ou impaire a été formée n^{os} **377-379**, et les équations (19) et (22) donnent les coefficients successifs.

L'intégrale V est connue :

$$(28) \qquad V = (1 - s^2) \frac{\partial}{\partial s} P_n(s)$$

P_n étant la fonction de Legendre de rang n.

Multiplions la première équation par V, la seconde par U, formons la différence et intégrons entre -1 et $+1$, il vient

$$\left[V\frac{\partial U}{\partial s} - U\frac{\partial V}{\partial s}\right]_{-1}^{+1} = \theta^2 \int_{-1}^{+1} UV ds - [\mathfrak{M} - n(n+1)] \int_{-1}^{+1} \frac{UV}{1 - s^2} ds.$$

Lorsque n est entier, V est nul pour $s = \pm 1$, et $\frac{\partial V}{\partial s}$ est fini. Si donc nous voulons qu'il en soit de même de U, le premier membre est nul, et l'on doit avoir

$$(29) \quad \theta^2 \int_{-1}^{+1} UV_n ds - [\mathfrak{M} - n(n+1)] \int_{-1}^{+1} \frac{UV_n}{1 - s^2} ds = 0,$$

quel que soit le nombre entier n.

En remplaçant U par $(1 - s^2)\,y$, et V par sa valeur, l'équation devient

$$(30)\quad [\mathfrak{N} - n(n+1)]\int_{-1}^{+1}(s^2-1)\,y\frac{\partial P_n}{\partial s}ds + \theta^2\int_{-1}^{+1}(s^2-1)^2 y\frac{\partial P_n}{\partial s}ds = 0.$$

384. Série paire. — Cherchons maintenant, au moyen de cette équation, une des racines de la série paire, (n impair) et regardons en même temps les coefficients comme développés suivant les puissances de θ^2.

$$(31)\qquad a_{2m} = \sum \alpha_{2m,2p}\,\theta^{2p}$$

avec

$$\mathfrak{N} = n(n+1) + N_2\theta^2 + N_4\theta^4 + \ldots$$

Prenant l'équation (30), *relative à cette même valeur de* n, $\frac{\partial P_n}{\partial s}$ est un polynôme de degré $n - 1$ pair, indépendant de θ, et nous pouvons déterminer les coefficients de proche en proche par une marche régulière.

Les équations (19) développées suivant les puissances de θ^2 donnent

$$(32)\quad 2m(2m-1)(\alpha_{2m,2p} - \alpha_{2m-2,2p}) = \alpha_{2m-2,2p-2} - \alpha_{2m-4,2p-2} - \left\{\begin{array}{l} n(n+1)\,\alpha_{2m-2,2p} \\ + N_2\alpha_{2m-2,2p-2} \\ + N_4\alpha_{2m-2,2p-4} \\ + \ldots \\ + N_{2p}\alpha_{2m-2,0} \end{array}\right.$$

Quel que soit m, les coefficients de θ^{2p} sont complètement déterminés au moyen des N jusqu'à N_{2p} compris, et du terme constant, $\alpha_{0,2p}$, qui reste arbitraire, et que nous prendrons nul pour toute valeur de p autre que zéro.

385. — Dans l'équation (30) développée en θ^2, nous rencontrerons les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} s^{2m}\frac{\partial P_n}{\partial s}ds = \left[s^{2m}P_n\right]_{-1}^{+1} - 2m\int_{-1}^{+1} s^{2m-1}P_n\,ds.$$

P_n est égal à $+1$ pour $s = +1$, et à -1 pour $s = -1$ (n impair) ; le premier terme est donc égal à 2. — Quant à l'intégrale du second terme on sait que dans le cas actuel (n impair), elle est égale à zéro pour $2m - 1 < n$, et à

$$(33) \quad 2\Pi_{m,n} = 2\frac{(2m-2)(2m-4)\ldots\ldots(2m+3-n)(2m+1-n)}{(2m+1)(2m+3)\ldots\ldots(2m+n-2)(2m+n)}$$

pour $2m - 1 \geqslant n$, avec la valeur $2\frac{1}{2m+1}$, si $n = 1$.

L'équation (30) devient

$$\theta^2 \sum (a_{2m} - 2a_{2m-2} + a_{2m-4})(1 - 2m\,\Pi_{m,n}) =$$

$$[\mathfrak{N} - n(n+1)] \sum (a_{2m} - a_{2m-2})(1 - 2m\,\Pi_{m,n}),$$

On a d'ailleurs évidemment

$$\sum (a_{2m} - a_{2m-2}) = o, \quad \sum (a_{2m} - 2a_{2m-2} + a_{2m-4}) = o.$$

Ecrivons séparément le coefficient de de θ^{2p+2} dans cette équatio n. il vient : (34)

$$N_{2p+2} \sum (\alpha_{2m,o} - \alpha_{2m-2,o})\, 2m\,\Pi_{m,n}$$

$$+ N_{2p} \sum (\alpha_{2m,2} - \alpha_{2m-2,2})\, 2m\,\Pi_{m,n}$$

$$+ \ldots\ldots$$

$$+ N_2 \sum (\alpha_{2m,2p} - \alpha_{2-2m,2p})\, 2m\,\Pi_{m,n}$$

$$= \sum (\alpha_{2m,2p} - 2\alpha_{2m-2,2p} + \alpha_{2m-4,2p})\, 2m\,\Pi_{m,n}.$$

L'équation (32) ayant déterminé les cœfficients $\alpha_{2k,2p}$ au moyen des N_{2p}, l'équation (34) détermine N_{2p+2} au moyen de ces coefficients $\alpha_{2k,2p}$ et permet une nouvelle application de l'équation (32) pour la détermination des coefficients $\alpha_{2k,2p+2}$.

Ce calcul de proche en proche, est d'ailleurs, réduit en formules, le même qui a été indiqué au n° **381**.

386. — Le résultat final est le développement de la fonction y suivant les puissances croissantes de θ^2

$$y = Y_0 + \theta^2 Y_2 + \theta^4 Y_4 + \dots$$

avec

$$Y_0 = \frac{\partial P_n}{\partial s} = \sum \alpha_{2m,0}\, s^{2m}.$$

$$Y_2 = \sum \alpha_{2m,2}\, s^{2m}.$$

$$Y_4 = \sum \alpha_{2m,4}\, s^{2m}.$$

etc...

On peut d'ailleurs écrire facilement les équations différentielles qui définissent les fonctions Y_0, Y_2,... ou mieux, les fonctions

$$(35)\quad \begin{cases} U_0 = (1 - s^2) Y_0, \\ U_2 = (1 - s^2) Y_2, \\ \dots\dots \end{cases}$$

du développement

$$U = U_0 + \theta^2 U_2 + \theta^4 U_4 + \dots$$

L'équation (13) développée en θ^2 donne

$$(36)\quad \begin{cases} (1-s^2)\dfrac{\partial^2 U_0}{\partial s^2} + n(n+1)U_0 = o. \\ (1-s^2)\dfrac{\partial^2 U_2}{\partial s^2} + n(n+1)U_2 = (1 - s^2 - N_2)U_0. \\ \dots\dots \\ (1-s^2)\dfrac{\partial^2 U_{2p}}{\partial s^2} + n(n+1)U_{2p} = \begin{cases} (1 - s^2 - N_2)U_{2p-2} \\ -[N_4 U_{2p-4} + N_6 U_{2p-6} + \dots + N_{2p} U_0] \end{cases} \end{cases}$$

L'équation qui détermine les N, développée de même, devient

$$(37)\quad \int_{-1}^{+1} \frac{\partial P_n}{\partial s}\left[(1-s^2)U_{2p} - N_2 U_{2p} - N_4 U_{2p-2} - \dots N_{2p+2} U_0\right] ds = o.$$

et détermine N_{2p+2} au moyen de U_0, ... U_{2p}.

Le mode de formation classique d'une intégrale particulière des

équations (36) avec second membre, n'est ici d'aucune utilité; l'intégrale particulière ainsi obtenue devenant infinie pour $s = 1$.

387. — Série impaire. — Posons

$$b_{2m+1} = \sum \beta_{2m,2p}\theta^{2p}, \tag{38}$$

et encore

$$\mathfrak{N} = n(n+1) + N_2\theta^2 + N_4\theta^4 + \ldots$$

avec n pair.

L'emploi de l'équation 30 avec la même valeur de n permet la détermination des coefficients N de proche en proche. Les équations (22) développées suivant les puissances de θ^2 donnent (39):

$$2m(2m+1)(\beta_{2m,2p} - \beta_{2m-2,2p}) = \beta_{2m-2,2p-2} - \beta_{2m-4,2p-2} - \left\{ \begin{array}{l} n(n+1)\beta_{2m-2,2p} \\ + N_2\beta_{2m-2,2p-2} \\ + N_4\beta_{2m-2,2p-4} \\ + \ldots \\ + N_{2p}\beta_{2m-2,0}. \end{array} \right.$$

Dans l'équation (30) développée en θ^2, nous rencontrerons les intégrales

$$\int_{-1}^{+1} s^{2m+1}\frac{\partial P_n}{\partial s}ds = \left[s^{2m+1}P_n\right]_{-1}^{+1} - (2m+1)\int_{-1}^{+1} s^{2m}P_n ds;$$

le premier terme est égal à 2; l'intégrale du second terme est, comme on sait, nulle pour $2m < n$, et égale à

$$2\Psi_{m,n} = 2\,\frac{2m(2m-2)\ldots(2m+4-n)(2m+2-n)}{(2m+1)(2m+3)\ldots(2m+1+n)} \tag{40}$$

pour $2m \geqslant n$.

L'équation (30) donne alors pour le coefficient de θ^{2p+2}, (41)

$$\left.\begin{array}{l}
N_{2p+2}\sum(\beta_{2m-2,0}-\beta_{2m,0})(2m+1)\Psi_{m,n}\\
+N_{2p}\sum(\beta_{2m-2,2}-\beta_{2m,2})(2m+1)\Psi_{m,n}\\
+\ldots\\
+N_{2}\sum(\beta_{2m-2,2p}-\beta_{2m,2p})(2m+1)\Psi_{m,n}\\
+\sum(\beta_{2m-4,2p}-2\beta_{2m-2,2p}+\beta_{2m,2p})(2m+1)\Psi_{m,n}
\end{array}\right\}=0.$$

Ces équations (40) et (41) détermineront les coefficients β et N.

388. Recherche d'une seconde intégrale. Méthode de Maclaurin — L'une ou l'autre des méthodes qui viennent d'être indiquées permet donc de former de proche en proche les termes du développement en θ^2 d'une intégrale U de l'équation (13) et de la valeur de $\mathfrak{N}$ qui rend U : $(1-s^2)$ finie dans tout le plan. L'intégrale ainsi obtenue donne la fonction $\mathcal{K}(s_2)$ qui définit la distribution à la surface des ellipsoïdes.

Il reste à trouver une seconde intégrale, correspondant aux mêmes valeurs de $\mathfrak{N}$, pour avoir par addition l'intégrale générale. Cette seconde intégrale, de parité différente de celle qui reste finie dans tout le plan, deviendra infinie pour $s^2=1$, comme nous l'avons déjà remarqué (n° **382**).

Plusieurs méthodes peuvent être employées pour cette recherche : indiquons d'abord la méthode classique employée par M. Maclaurin.

Soit y_1 une intégrale paire, et z l'intégrale impaire de l'équation (18) pour la même valeur de $\mathfrak{N}$.

Posons

$$z=y_1u+v \tag{42}$$

en appelant u une fonction impaire, qui devient infinie pour $s^2=1$, et v une série, également impaire, convergente dans tout le plan.

Substituons dans l'équation (18) il vient :

$$(43)\quad \left\{\begin{aligned}&(1-s^2)\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-4s\frac{\partial v}{\partial s}+(\mathfrak{N}-2-\theta^2+\theta^2 s^2)v\\&+2(1-s^2)\frac{\partial y_1}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial s}+y_1\left[(1-s^2)\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}-4s\frac{\partial u}{\partial s}\right]\end{aligned}\right\}=0.$$

Faisons disparaître le terme en y_1 en prenant

$$(44)\qquad u=\frac{1}{8}\left[\log\frac{s-1}{s+1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}\right],$$

ce qui donne

$$8\frac{\partial u}{\partial s}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s-1)^2},$$

et porté dans l'équation (39) la transforme en

$$(45)\quad (1-s^2)^2\frac{\partial^2 v}{\partial s^2}-4s(1-s^2)\frac{\partial v}{\partial s}+(\mathfrak{N}-2-\theta^2+\theta^2 s^2)(1-s^2)v=\frac{\partial y_1}{\partial s}.$$

389. — Posons

$$(46)\qquad v=A_1 s+A_3 s^3+\dots+A_{2m+1}s^{2m+1}+\dots,$$

et rappelons-nous qu'on a

$$y_1=a_0+a_2 s^2+\dots+a_{2m}s^{2m}+\dots,$$

puis, identifions terme à terme : il vient

$$6A_3+(\mathfrak{N}-6-\theta^2)A_1=2a_2$$
$$20A_5+(\mathfrak{N}-26-\theta^2)A_3=4a_4$$
$$42A_7+(\mathfrak{N}-62-\theta^2)A_5+(26-\mathfrak{N}-2\theta^2)A_3-\theta^2 A_1=6a_6$$

et en général

$$(47)\quad \left\{\begin{aligned}&2m(2m+1)(A_{2m+1}-A_{2m-1})\\&+[\mathfrak{N}-2-2m(2m-3)-\theta^2](A_{2m-1}-A_{2m-3})\\&+\theta^2(A_{2m-3}-A_{2m-5})-2ma_{2m}\end{aligned}\right\}=0.$$

Le coefficient A_1 reste indéterminé, car on peut ajouter la série impaire (21) sans cesser de satisfaire à l'équation différentielle, — et cela, joint à la présence de 4 coefficients consécutifs dans la relation (47), rend ce mode d'intégration peu maniable.

Nous nous contenterons de noter que la seconde intégrale devient infinie pour $s^2 = 1$, comme la fonction u, (44).

L'intégrale dont nous avons besoin pour $\mathcal{E}(s_1)$ n'est pas en effet, l'intégrale de parité différente de $\mathcal{H}$; c'est celle qui correspond à l'onde émise, qui est la somme des deux intégrales paire et impaire multipliées par des facteurs convenables. Il est plus simple de la former directement.

390. — Recherche directe de l'intégrale pour l'onde émise. — Pour cela formons une intégrale de la forme générale indiquée par Laplace

$$(48) \qquad y = \int_a^b e^{\theta\zeta s}\,\varphi(\zeta)\,d\zeta.$$

Substituons dans l'équation (18), il vient, en supposant φ indépendante de s,

$$(49) \int_a^b \left[(1-s^2)\theta^2\zeta^2 - 4s\theta\zeta + \mathfrak{N} - 2 - \theta^2 + \theta^2 s^2\right]\varphi(\zeta)\,e^{\theta\zeta s}\,d\zeta = o.$$

D'autre part, si la fonction φ satisfait à une équation du second ordre

$$(50) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + p\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + q\varphi = o.$$

on a entre les mêmes limites

$$\int_a^b Z\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial\zeta^2} + p\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + q\varphi\right)\partial\zeta = o\,;$$

en intégrant par parties,

$$(51) \left[Z\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} + \varphi\left(pZ - \frac{\partial Z}{\partial\zeta}\right)\right]_a^b + \int_a^b \varphi\left[\frac{\partial^2 Z}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial.pZ}{\partial\zeta} + q\,Z\right]\partial\zeta = o$$

Si les limites a, b sont telles que la parenthèse s'annule, l'équation (50) a pour conséquence

$$\int_a^b \varphi\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial\zeta^2} - \frac{\partial pZ}{\partial\zeta} + qZ\right)d\zeta = o$$

qu'on peut identifier à l'équation (49) pourvu que l'on ait

$$(52)\quad \frac{\partial^2 Z}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial p Z}{\partial \zeta} + qZ = e^{\theta\zeta s}\left[(1-s^2)\theta^2\zeta^2 - 4s\,\theta\zeta + \mathfrak{M} - 2 - \theta^2 + \theta^2 s^2\right].$$

Cherchons à satisfaire à cette équation en laissant p, q, indépendants de s comme cela est nécessaire pour que φ le soit aussi, et posant

$$Z = S\,e^{\theta\zeta s},$$

il vient

$$\theta^2 s^2 S + \theta s\left(\frac{2\partial S}{\partial \zeta} - pS\right) + \frac{\partial^2 S}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial\,(pS)}{\partial \zeta} + qS =$$
$$= \theta^2 s^2(1-\zeta^2) - 4\theta s\zeta + \mathfrak{M} - 2 - \theta^2 + \theta^2\zeta^2.$$

Identifiant terme à terme, on en déduira

$$S = 1 - \zeta^2$$
$$pS = 0$$
$$qS = \mathfrak{M} - \theta^2 + \theta^2\zeta^2.$$

L'équation (50) en φ est donc identique à l'équation (13). Soit donc y_1 la première intégrale, valable dans tout le plan, (**382**) obtenue pour l'équation (18) nous pouvons prendre

$$\varphi(\zeta) = (1-\zeta^2)\,y_1(\zeta),$$

et dans (48)

$$(53)\qquad y_2(s) = \int_a^b (1-\zeta^2)\,y_1(\zeta)\,e^{\theta\zeta s}\,d\zeta$$

si les limites a, b, sont convenablement choisies.

391. — Portons ces valeurs dans le premier terme de l'équation (51)

$$(54)\qquad Z\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \varphi\left(pZ - \frac{\partial Z}{\partial \zeta}\right) = e^{\theta s\zeta}(1-\zeta^2)^2\left[\frac{\partial y_1}{\partial \zeta} - \theta s\,y_1\right]$$

Cette expression prend la même valeur nulle, aux deux limites $a = -1$, $b = +1$, quel que soit s. On peut donc adopter ces deux limites dans un premier cas, et on a (55)

$$\int_{-1}^{+1}(1-\zeta^2)\,y_1(\zeta)\,e^{\theta\zeta s}\,d\zeta = 2\int_0^1 (1-\zeta^2)\left[y_1(\zeta)\,e^{\theta\zeta s} + y_1(-\zeta)\,e^{-\theta\zeta s}\right].$$

Cette intégrale, de même parité que y_1, et évidemment finie pour $s^2 = \pm 1$, et dans tout l'intervalle, ne peut différer de y_1 que par un facteur numérique :

$$\frac{\int_{-1}^{+1} (1 - \zeta^2) \, y_1(\zeta) \, e^{\theta\zeta} \, d\zeta}{y_1(1)}.$$

392. — Pour avoir la seconde intégrale, supposons que nous avons pris celle des deux valeurs de θ dont la partie réelle est négative, et prenons pour limites $a = +1$, $b = +\infty$:

$$(56) \qquad y_2(s) = \int_{+1}^{+\infty} (1 - \zeta^2) \, y_1(\zeta) \, e^{\theta\zeta s} \, d\zeta.$$

Cette intégrale diffère certainement de y_1, car elle contient à la fois des termes pairs et impairs.

Les termes de la formule (54) sont d'ailleurs nuls pour $\zeta = 1$.

Pour $\zeta = +\infty$, rappelons nous que les termes éloignés de la série y_1 deviennent les mêmes que ceux de $Ch\,\theta\zeta$, ou de $Sh\,\theta\zeta$ suivant que y_1 est paire ou impaire. Il en est de même de $\frac{\partial y_1}{\partial \zeta}$; les termes qui deviennent grands sont ceux dont l'ensemble équivaut à $e^{-\theta\zeta}$, car la partie réelle de θ est négative ; après multiplication par $e^{+\theta\zeta s}$, ils donnent un ensemble qui correspond à $e^{\theta\zeta(s-1)}$. Si donc on suppose s plus grand que 1, et la partie réelle de θ négative, comme il a été dit, l'ensemble de ces termes décroît indéfiniment quand ζ passe à l'infini. L'expression (54) est donc nulle aussi à la seconde limite, et y_2 satisfait bien à l'équation différentielle. Ces mêmes considérations montrent que l'élément sur lequel porte l'intégrale (55) décroît comme $e^{\theta\zeta(s-1)}$ et par conséquent que l'intégrale est finie pour toute valeur de s plus grande que 1, et décroît exponentiellement à grande distance.

C'est cette seconde intégrale, qui correspond à l'onde émissive, et à la fonction $\mathcal{E}(s_1)$

$$\mathcal{E}(s_1) = (1 - s_1^2) \, y_2(s_1).$$

393. — Du développement de y_1, on tire immédiatement le dévelop-

pement de y_2 suivant les puissances décroissantes de s_1, en intégrant terme à terme :

Posons

(57) $$\mathcal{H}(\zeta) = (1 - \zeta^2)\, y(\zeta) = \sum \mathcal{A}_m \zeta^m$$

et rappelons-nous que

$$\int_1^{\infty} \zeta^m e^{\theta s \zeta}\, d\zeta = \frac{1}{(\theta s)^{m+1}} \int_{\theta s}^{-\infty} \xi^m e^{\xi}\, d\xi$$

$$= - e^{\theta s}\left[\frac{1}{\theta s} - \frac{m}{\theta^2 s^2} + \frac{m(m-1)}{\theta^3 s^3} + \ldots \pm \frac{m!}{(\theta s)^m}\right].$$

Il vient

(58) $$\mathcal{E}(s_1) = (1 - s_1^2)\, e^{\theta s_1}\left[-\frac{\Sigma \mathcal{A}_m}{\theta s_1} + \sum \frac{m \mathcal{A}_m}{\theta^2 s_1^2} - \sum \frac{m(m-1)\mathcal{A}_m}{\theta^3 s_1^3} + \ldots\right]$$

La signification des coefficients est évidente :

$$\sum \mathcal{A}_m = \mathcal{H}(+1) = o$$

$$\sum m \mathcal{A}_m = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}\right)_{+1} = \mathcal{H}'(+1)$$

$$\sum m(m-1)\mathcal{A}_m = \mathcal{H}''(+1)$$

etc.

(59) $$\mathcal{E}(s_1) = (1 - s_1^2)\, e^{\theta s_1}\left[\frac{\mathcal{H}'(+1)}{\theta^2 s_1^2} - \frac{\mathcal{H}''(+1)}{\theta^3 s_1^3} + \frac{\mathcal{H}'''(+1)}{\theta^4 s_1^4} \ldots\right].$$

L'intégration par parties aurait conduit au même résultat.

394. — Les coefficients de la série (51) peuvent être déterminés au moyen des coefficients $\mathcal{A}_m$ et par conséquent des coefficients a_m ou b_m (nos **377-379**). Mais il est plus simple de recourir à l'équation différentielle pour les déterminer comme nous allons le faire.

Posons

$$s = 1 + z.$$

L'équation différentielle (13) devient

(60) $$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z^2} = \left(\theta^2 + \frac{\mathfrak{N}}{z^2 + 2z}\right)\mathcal{H}.$$

La fonction $\mathcal{H}$, lorsqu'on emploie les valeurs de $\mathfrak{N}$ que nous avons déterminées, s'annule au premier degré pour $s = 1$, ou $z = 0$; on peut donc la développer en série de Taylor

$$(61) \qquad \mathcal{H} = z\mathcal{H}' + \frac{z^2}{2!}\mathcal{H}'' + \frac{z^3}{3!}\mathcal{H}''' + \ldots$$

les $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$, $\mathcal{H}'''$, étant précisément ceux de la série (59) pour $\mathcal{E}(s_1)$.

Portant le développement (61) dans l'équation (60), et identifiant les coefficients des mêmes puissances de z, il vient, en fonction de $\mathcal{H}'$, seul qui reste comme coefficient arbitraire de toute la série :

$$(62) \quad \begin{cases} 2\,\mathcal{H}'' = \mathfrak{N}\mathcal{H}'. \\ 2\,\mathcal{H}''' = \left(\frac{\mathfrak{N}}{2!} - 1\right)\mathcal{H}'' + 2\theta^2\mathcal{H}'. \\ 2\,\frac{\mathcal{H}''''}{2!} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{3!} - 1\right)\mathcal{H}''' + 2\theta^2\,\frac{\mathcal{H}''}{1.2} + \theta^2\mathcal{H}'_1. \\ \ldots\ldots \\ 2\,\frac{\mathcal{H}^{(m+1)}}{(m-1)} = \left(\frac{\mathfrak{N}}{m.m-1} - 1\right)\mathcal{H}^m + \frac{2\theta^2\mathcal{H}^{m-1}}{m-1} + \theta^2\mathcal{H}^{m-2}. \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

Cette relation générale (59) entre 4 coefficients consécutifs montre que pour m très grand, le rapport d'un coefficient $\mathcal{H}^{m+1}$ au précédent $\mathcal{H}^m$ peut s'approcher de l'une ou l'autre des deux limites $-\frac{m-1}{2}$, ou $+\theta$.

L'étude de la série y_1, montre que pour la fonction $\mathcal{H}$, avec les déterminations particulières adoptées pour les $\mathfrak{N}$, la limite sera $+\theta$.

La série (59) définit donc la fonction $\mathcal{E}$ dans tout le champ réellement utile, et jusque sur l'ellipsoïde réduit à son axe.

En tenant compte des relations (62), les termes les plus importants de la série 59 à grande distance, sont

$$(63) \qquad \mathcal{E}(s_1) = \frac{-\mathcal{H}'}{\theta^2}\,e^{\theta s_1}\left[1 - \frac{\mathfrak{N}}{2\theta s_1} + \frac{\mathfrak{N}(\mathfrak{N}-2)}{8\theta^2 s_1^2} + \ldots\right].$$

Ce développement, excellent pour le calcul des valeurs de la fonc-

tion quand θ est connu, ne peut être d'aucun usage pour la recherche des valeurs de θ qui satisfont à une condition déterminée; car θ entre à la fois dans les numérateurs $\mathcal{H}'$, $\mathcal{H}''$, ... et dans les dénominateurs. Tous les termes de la série (63) fournissent donc un terme indépendant de θ, etc. et la série en θ que l'on tirerait du développement (63) serait illimitée dans les deux sens, ce qui ne se prête pas simplement à un calcul approché des racines θ de $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1}$, qui sont le but ultime de notre recherche.

Il faut donc donner à la fonction $\mathcal{E}(s_1)$ une autre forme.

395. — Deuxième forme de l'intégrale d'émission. — Ramenons les limites de l'intégration à être finies; c'est ce qu'on fait facilement à l'exemple de M. Abraham en remplaçant dans (62) $y_1(\zeta)$ par son expression tirée de (55) : on a alors,

$$(64)\quad \mathcal{E}(s_1) = (1 - s_1^2)\int_1^{\infty} d\zeta\,(1 - \zeta^2)\,e^{\zeta\theta s}\int_{-1}^{+1}(1 - \xi^2)\,y_1(\xi)\,e^{\theta\zeta\xi}\,d\xi,$$

et en changeant l'ordre des intégrations

$$\mathcal{E}(s_1) = (1 - s_1^2)\int_{-1}^{+1} y_1(\xi)(1 - \xi^2)\,d\xi\int_1^{\infty} e^{\theta\zeta(s + \xi)}(1 - \zeta^2)\,d\zeta.$$

Mais on a

$$\int_1^{\infty} e^{\theta\zeta(s + \xi)}(1 - \zeta^2)\,d\zeta = \frac{1}{\theta(s + \xi)}\int_{\theta(s + \xi)}^{-\infty} e^u\,du - \frac{1}{\theta^3(s + \xi)^3}\int_{\theta(s + \xi)}^{-\infty} u^2 e^u\,du.$$

$$= \frac{-e^{\theta(s + \xi)}}{\theta(s + \xi)} + \frac{e^{\theta(s + \xi)}}{\theta^3(s + \xi)^3}\left[\theta^2(s + \xi)^2 - 2\theta(s + \xi) + 2\right].$$

$$= 2e^{\theta(s + \xi)}\left[\frac{1}{\theta^3(s + \xi)^3} - \frac{1}{\theta^2(s + \xi)^2}\right].$$

et enfin

$$\mathfrak{G}(s_1) = 2(1 - s_1^2) \int_{-1}^{+1} (1 - \xi^2)\, y(\xi)\, e^{\theta(s+\xi)} \left(\frac{1}{\theta^3 (s+\xi)^3} - \frac{1}{\theta^2 (s+\xi)^2} \right) d\xi.$$

396. — Cette formule peut d'ailleurs être obtenue sans passer par l'intermédiaire de l'équation (55) comme on va le voir.

Cherchons à obtenir la seconde intégrale sous forme d'intégrale définie

$$(66) \qquad y = \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}(\xi)\, \psi(s + \xi)\, e^{\theta(s+\xi)}\, d$$

en choisissant convenablement la fonction ψ. Formons les dérivées

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}(\xi)\, [\theta\psi + \psi']\, e^{\theta(s+\xi)}\, d\xi$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = \int_{-1}^{+1} \mathcal{H}(\xi)\, [\theta^2\psi + 2\theta\psi' + \psi'']\, e^{\theta(s+\xi)}\, d\xi$$

et substituons dans l'équation 18 :

$$(67) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1 - s^2) \frac{\partial^2 y}{\partial s^2} - 4s \frac{\partial y}{\partial s} + y\, (\mathfrak{N} - 2 - \theta^2 + \theta^2 s^2) = \\ &\int_{-1}^{+1} \mathcal{H} e^{\theta(s+\xi)} \begin{bmatrix} (1 - s^2)\, \psi'' \\ + \psi' [2\theta (1 - s^2) - 4s] \\ + \psi [\theta^2 (1 - s^2) - 4s\theta + \mathfrak{N} - 2 - \theta^2 + \theta^2 s^2] \end{bmatrix} d\xi. \end{aligned} \right.$$

Éliminons $\mathfrak{N}$ au moyen de l'équation 13 à laquelle satisfait $\mathcal{H}$, l'intégrale devient

$$\int_{-1}^{+1} e^{\theta(s+\xi)} \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{H} \begin{bmatrix} (1 - s^2)\, \psi'' + \psi' [2\theta (1 - s^2) - 4s] \\ + \psi [\theta^2 (1 - \xi^2) - 4s\theta - 2] \end{bmatrix} \\ &+ \psi \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi^2} (\xi^2 - 1) \end{aligned} \right\} d\xi.$$

397. — Intégrons par parties le dernier terme :

$$\int_{-1}^{+1} e^{\theta(s+\xi)}\, \psi\,(s+\xi)\,(\xi^2-1)\,\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\xi^2}\,d\xi =$$

$$\left\{\begin{aligned} &-\int_{-1}^{+1} e^{\theta(s+\xi)}\left[(\xi^2-1)\,\psi' + \theta\,(\xi^2-1)\,\psi + 2\xi\psi\right]\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\xi}\,d\xi.\\ &+\left[e^{\theta(s+\xi)}\,(\xi^2-1)\,\psi\,\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\xi}\right]_{-1}^{+1}.\end{aligned}\right.$$

Le terme intégré s'annule aux limites, à cause du facteur $\xi^2 - 1$. Une seconde intégration par parties donne

$$\int_{-1}^{+1} e^{\theta(s+\xi)}\,(s+\xi)\,(\xi^2-1)\,\psi\,\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\xi^2}\,d\xi =$$

$$\left\{\begin{aligned} &+\int_{-1}^{+1} e^{\theta(s+\xi)}\left[(\xi^2-1)\psi''+(2\theta(\xi^2-1)+4\xi)\psi'+[\theta^2(\xi^2-1)+4\theta\xi+2]\psi\right]\\ &-\left[e^{\theta(s+\xi)}\left[(\xi^2-1)\,\psi' + \theta\,(\xi^2-1)\,\psi + 2\xi\psi\right]\mathcal{H}\right]_{-1}^{+1}.\end{aligned}\right.$$

Le terme intégré s'annule encore aux limites, lorsque la constante $\mathfrak{N}$ a été choisie, comme nous le supposons, de manière que $\mathcal{H}$ soit aussi nul aux limites.

Il reste donc comme second membre de l'équation (67)

$$\int_{-1}^{+1} e^{\theta(s+\xi)}\,\mathcal{H}\left\{\begin{aligned} &(1-s^2)\,\psi'' + [2\theta\,(1-s^2) - 4s]\,\psi'\\ &+[\theta^2\,(1-\xi^2) - 4s\theta - 2]\,\psi\\ &+(\xi^2-1)\,\psi'' + [2\theta\,(\xi^2-1) + 4\xi]\,\psi'\\ &+[\theta^2\,(\xi^2-1) + 4\theta\xi + 2]\,\psi\end{aligned}\right\}d\xi.$$

Or la parenthèse se réduit facilement à

$$(\xi - s)\left[(\xi+s)\,\psi'' + [4 + 2\theta\,(\xi+s)]\,\psi' + 4\theta\psi\right].$$

398. — Pour que l'équation (18) soit satisfaite par l'expression (66), il faut et il suffit que le second membre de l'équation (67) soit nul, et par conséquent, que la fonction $\psi\,(s+\xi)$ satisfasse à l'équation

$$(68)\qquad (\xi+s)\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\left[4+2\theta\,(\xi+s)\right]\frac{\partial\psi}{\partial\xi}+4\theta\psi=o.$$

On y réussit en prenant

$$\psi=\frac{2}{\theta^3}\left(\frac{1}{(s+\xi)^3}-\frac{\theta}{(s+\xi)^2}\right),$$

fonction qui reste finie dans tout le champ d'intégration $s>1$, et ne devient infinie que pour $s=1$ (¹).

L'intégrale

$$(69)\ \mathcal{E}\,(s_1)=(1-s_1^2)\int_{-1}^{+1}\frac{2}{\theta^3}\mathcal{H}\,(\xi)\left[\frac{1}{(s_1+\xi)^3}-\frac{\theta}{(s_1+\xi)^2}\right]e^{\theta\,(s_1+\xi)}\,d\xi$$

(¹) M. M. Abraham est conduit à mettre l'intégrale sous la forme

$$\mathcal{E}\,(s_1)=(1-s_1^2)\int_{-1}^{+1}\mathcal{H}\,(\ )\,\frac{e^{\theta\,(s_1+\xi)}}{(s_1+\xi)^2}\,d\xi$$

[(*Math. Ann.*) Bd, 52, p. 108, formule (36) :

$$e_n\,H_n\,(x)=(1-x^2)\int_{-1}^{+1}d\alpha\,E_n\,(\alpha)\,\frac{\overline{S_1}\,(\xi)}{\xi^2}$$

avec

$$\xi=p\,(x+\alpha),\quad \overline{S_1}\,(\xi)=2e^{\xi},$$

E correspond à notre $\mathcal{H}$,
H » » $\mathcal{E}$,
x » » s_1 ;]

Il faut qu'il y ait quelque lapsus dans ses considérations fondées sur des identités de développements en série, et l'emploi des fonctions limites pour la sphère, car cette fonction ne satisfait pas à l'équation (13), puisque $\psi=\frac{1}{(s_1+\xi)^2}$ ne satisfait pas à l'équation (64).

est donc bien celle qui convient pour représenter une série de sources disposées sur l'axe $s_1 = 1$ entre les foyers $\pm f$.

Telle qu'elle est écrite, l'intégrale correspond aux sources émissives puisque nous avons pris pour facteur de temps (11) (n° **374**) $e^{-\frac{\theta \Omega t}{f}}$.

Pour avoir les sources absorbantes il suffirait de changer le signe de θ dans la formule (69), qui satisfait encore à l'équation (18) puisque celle-ci ne contient que θ^2.

On peut encore écrire cette intégrale sous la forme

$$(70) \qquad \mathcal{E}(s_1) = \frac{1}{\theta^3}(s_1^2 - 1)\, e^{-\theta s_1} \frac{\partial}{\partial s_1} e^{2\theta s_1} \int_{-1}^{+1} \frac{\mathcal{H}(\xi)\, e^{\theta\xi}}{(s_1 + \xi)^2} d\xi.$$

399. Séparation des termes de même parité. — Il est d'ailleurs facile de séparer les termes de même parité, soit sur l'intégrale, soit sur son développement. D'abord, dans l'intégrale, il suffit de remarquer que l'on a identiquement

$$4\, e^{\theta s}\left(\frac{1}{(s+\xi)^3} - \frac{\theta}{(s+\xi)^2}\right) = \left\{\begin{aligned} &\left(e^{\theta s} + e^{-\theta s}\right)\left\{\frac{1}{(\xi+s)^3} + \frac{1}{(\xi-s)^3} - \frac{\theta}{(\xi+s)^2} - \frac{}{(\xi - \cdots}\right. \\ &+\left(e^{\theta s} - e^{-\theta s}\right)\left\{\frac{1}{(\xi+s)^3} - \frac{1}{(\xi-s)^3} - \frac{\theta}{(\xi+s)^2} + \frac{}{(\xi - \cdots}\right. \\ &+\left(e^{\theta s} + e^{-\theta s}\right)\left\{\frac{1}{(\xi+s)^3} - \frac{1}{(\xi-s)^3} - \frac{\theta}{(\xi+s)^2} + \frac{}{(\xi - \cdots}\right. \\ &+\left(e^{\theta s} - e^{-\theta s}\right)\left\{\frac{1}{(\xi+s)^3} + \frac{1}{(\xi-s)^3} - \frac{\theta}{(\xi+s)^2} - \frac{}{(\xi - \cdots}\right. \end{aligned}\right.$$

dont les deux premières lignes sont paires, et les deux dernières impaires.

La somme des intégrales

$$e^{\theta s}\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)\, y_1(\xi)\, e^{\theta\xi}\left(\frac{1}{(\xi+s)^3} - \frac{\theta}{(\xi+s)^2}\right)d\xi$$

$$+\, e^{-\theta s}\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)\, y_1(\xi)\, e^{\theta\xi}\left(\frac{1}{(\xi-s)^3} - \frac{\theta}{(\xi-s)^2}\right)d\xi$$

ne diffère donc de y_1 que par un facteur constant, pour les valeurs de s_1 supérieures à 1. Leur différence est la fonction de parité différente de y_1, recherchée au n° 388.

Dans le développement 73 (n° **400**) les termes se trouvent naturellement groupés suivant leur parité, soit dans les coefficients $\theta G_{m-1} - G_m$, soit dans leur facteur en s. Il est inutile de les écrire ici.

400. Développpement de $\mathcal{E}$ en série. — Développons l'intégrale (69) en série. La fonction $\mathcal{H}(\xi)$ étant développable en série convergente dans tout le plan, nous pouvons écrire

$$(71)\quad \mathcal{H}(\xi)e^{\theta(s_1+\xi)} = G_0 + G_1(s_1+\xi) + G_2(s_1+\xi)^2 + \ldots + G_m(s_1+\xi)^m + \ldots$$

en posant

$$(72)\left\{\begin{aligned} G_0 &= \mathcal{H}(-s_1)\\ G_1 &= \theta\mathcal{H}(-s_1) + \frac{\partial\mathcal{H}(-s_1)}{\partial(-s_1)}\\ &\ldots\ldots\\ G_m &= \frac{e^{\theta s_1}}{m!}\frac{\partial^m}{\partial(-s_1)^m}\left[e^{-\theta s_1}\mathcal{H}(-s_1)\right]\\ &= \frac{1}{m!}\left[\theta^m\mathcal{H}(-s_1) + m\theta^{m-1}\mathcal{H}'(-s_1) + \frac{m(m-1)}{1.2}\theta^{m-2}\mathcal{H}''(-s_1)\right.\\ &\qquad\left. + \ldots + \frac{\partial^m\mathcal{H}(-s_1)}{\partial(-s_1)^m}\right].\end{aligned}\right.$$

Portant dans l'intégrale (69), il vient :

$$\mathcal{E}(s_1) = \frac{2}{\theta^3}(s_1^2 - 1)\sum_{m=0}^{m=\infty}(\theta G_{m-1} - G_m)\int_{-1}^{+1}(s_1+\xi)^{m-3}\,d\xi,$$

ce qui donne, en effectuant les quadratures :

$$(73)\quad \mathcal{E}(s_1) = 2\,\frac{(s_1^2 - 1)}{\theta^3}\left[\begin{aligned} &\frac{G_0}{2}\left(\frac{1}{(s_1+1)^2} - \frac{1}{(s_1-1)^2}\right) \\ &+ (\theta G_0 - G_1)\left(\frac{1}{s_1 - 1} - \frac{1}{s_1 + 1}\right) \\ &+ (\theta G_1 - G_2)\log\frac{s_1+1}{s_1-1} \\ &+ 2(\theta G_2 - G_3). \\ &+ (\theta G_3 - G_4)\,\frac{(s_1+1)^2 - (s_1-1)^2}{2} \\ &+ \ldots\ldots \\ &+ (\theta G_{m-1} - G_m)\,\frac{(s_1+1)^{m-2} - (s_1-1)^{m-2}}{m-2} \\ &+ \ldots\ldots \end{aligned}\right]$$

avec (74)

$$\theta G_{m-1} - G_m = \frac{1}{m!}\left[\begin{aligned} &-\mathcal{H}^{(m)} + \frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\theta^2\,\mathcal{H}^{(m-2)} \\ &+ \frac{m}{1}\,\frac{m-1}{2}\,\frac{m-2}{3}\,.\,2\theta^3\mathcal{H}^{(m-3)} + \ldots \\ &+ \frac{m!}{p!\,(m-p)!}\,(p-1)\,\theta^p\mathcal{H}^{(m-p)} \\ &+ \ldots + (m-1)\,\theta^m\mathcal{H} \end{aligned}\right].$$

Le premier et le troisième termes de ce développement deviennent infinis comme l'indiquait la formation de la seconde intégrale (n° **388**). Ecrivons complètement les 3 premiers termes en fonction de y_1, toutes réductions faites :

$$\mathcal{E}(s_1) = \frac{2}{\theta^3}(s_1^2 - 1)\left\{\begin{aligned} &y_1(-s_1)\left[\frac{1}{s_1-1} + \frac{1}{s_1+1} - \frac{\mathfrak{M}}{2}\log\frac{s_1+1}{s_1-1} + \ldots\right] \\ &+ \frac{\partial y_1(-s_1)}{\partial(-s_1)}\left[-2 + \ldots\right] + \ldots \end{aligned}\right.$$

401. Formules de récurrence. — On peut former facilemen

l'équation de récurrence qui permet de déterminer de proche en proche les G_m ou leurs combinainaisons utiles. Posant

$$\mathcal{H}(-s_1) = \mathcal{K}(-s_1)e^{\theta s_1}, \tag{75}$$

ce qui définit la fonction $\mathcal{K}$ en $\mathcal{H}$, et portant dans l'équation (13) celle-ci devient

$$(s_1^2 - 1)\left(\frac{\partial^2 \mathcal{K}}{\partial(-s_1)^2} - 2\theta \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial(-s_1)}\right) = \mathfrak{N}\mathcal{K};$$

cette équation définit la dérivée seconde, et donne pour les dérivées suivantes la relation récurrente

$$\left.\begin{array}{l} (s_1^2 - 1)\left[\mathcal{K}^{(m+2)} - 2\theta\mathcal{K}^{(m+1)}\right] \\ \quad - 2ms_1\left[\mathcal{K}^{(m+1)} - 2\theta\mathcal{K}^{m}\right] \\ + (m-1)m\left[\mathcal{K}^{(m)} - 2\theta\mathcal{K}^{(m-1)}\right] \end{array}\right\} = \mathfrak{N}\mathcal{K}^m,$$

les dérivées étant toujours prises par rapport à $-s_1$.

Comme on a d'après 75 et 72

$$\mathcal{K}^{(m)} = m!\, e^{-\theta s_1} G_m, \tag{76}$$

il en résulte :

$$\left.\begin{array}{l} (s_1^2 - 1)(m+1)\left[(m+2)G_{m+2} - 2\theta G_{m+1}\right] \\ - 2ms_1\left[(m+1)G_{m+1} - 2\theta G_m\right] \\ +(m-1)\left[mG_m - 2\theta G_{m-1}\right] \end{array}\right\} = \mathfrak{N}G_m. \tag{77}$$

402. — Posant maintenant

$$\theta G_{m-1} - G_m = J_m \tag{78}$$

on déduit facilement de la relation précédente (77) une relation analogue pour les J :

$$\left.\begin{array}{l} \theta_{m-1}(s^2 - 1)(m+1)(m+2)J_{m+2} \\ + \left[(\theta_{m-1} - \theta_m)(s^2 - 1)\theta - 2\theta_{m-1}s\right]m(m+1)J_{m+1} \\ + \left[2(m-1)\theta_{m-1} + \left(4(m-1)\theta s + (m-2)(m-3) - \mathfrak{N}\right)\theta_m\right]J_m \\ - \theta_m 2(m-2)\theta J_{m-1} \end{array}\right\} = 0 \tag{79}$$

en posant

$$\left\{\begin{aligned} \Theta_m &= \theta^2(s^2-1)m(m+1) - 2\theta s m(m-1) \\ &\quad + (m-1)(m-2) - \mathfrak{N}. \end{aligned}\right.$$

Toutefois, cette relation de forme compliquée, est d'un usage moins avantageux que la précédente (77). On a d'ailleurs

$$J_0 = -G_0 = -\mathcal{H}(-s),$$
$$J_1 = \theta G_0 - G_1 = -\frac{\partial \cdot \mathcal{H}(-s)}{\partial(-s)},$$

puis, par l'équation (82)

$$(80)\quad J_2 = +\frac{\mathfrak{N}}{2(s^2-1)}J_0 = -\mathfrak{N}\frac{\mathcal{H}(-s)}{2(s^2-1)} = +\mathfrak{N}\frac{\mathcal{V}_1(-s)}{2}$$

et les autres, de proche en proche.

403. Ellipsoïdes allongés. — Posons, pour étudier les ellipsoïdes allongés,

$$s_1 = 1 + \varepsilon$$

et développons le second membre de l'équation 73, en nous rappelant que dans les développements 72, qui définissent $G_0, \ldots G_m, \ldots$ il faut remplacer s_1 par $-(1+\varepsilon)$. Cela donne

$$\mathcal{H}(-1-\varepsilon) = \mathcal{H}(-1) - \varepsilon\mathcal{H}'(-1) + \frac{\varepsilon^2}{2}\mathcal{H}''(-1) - \ldots$$

Nous obtenons ainsi (81)

$$8(1+\varepsilon) = \frac{2}{\theta^3}\left[\begin{aligned} & -\frac{\mathcal{H}(-1)}{\varepsilon} - \frac{\mathcal{H}(-1)}{2} - \mathcal{H}'(-1) \\ & + \left[\begin{aligned} & \varepsilon(\theta^2\mathcal{H} - \mathcal{H}'') \\ & + \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\theta^2\mathcal{H} - \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H}''' - 2\theta^2\mathcal{H}'\right] \end{aligned}\right]\log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \\ & + \varepsilon\left[\begin{aligned} & \frac{\mathcal{H}}{4} + \frac{\mathcal{H}'}{2} + \frac{3}{2}\mathcal{H}'' \\ & + \frac{2}{3}(-\mathcal{H}''' + 3\theta^2\mathcal{H}' + 2\theta^2\mathcal{H}) \\ & + \ldots + \frac{2^{m-1}}{m-2}(\theta G_{m-1} - G_m) + \ldots \end{aligned}\right] \end{aligned}\right]$$

Dans cette équation, $\mathcal{H}(-1)$, $\mathcal{H}'(-1)$, etc., peuvent être déduits de l'équation 13, comme l'ont été $\mathcal{H}(1)$, $\mathcal{H}'(1)$, au n° **394**, on obtient d'ailleurs les formules récurrentes relatives à (-1), en changeant le signe des dérivées impaires dans les formules 62 du n° **394** : (82)

$$2\mathcal{H}'' = -\mathfrak{N}\mathcal{H}'$$

$$2\mathcal{H}''' = -\left(\frac{\mathfrak{N}}{2!} - 1\right)\mathcal{H}'' + 2\theta^2\mathcal{H}'$$

$$\frac{2\mathcal{H}''''}{2!} = -\left(\frac{\mathfrak{N}}{3!} - 1\right)\mathcal{H}''' + 2\theta^2\frac{\mathcal{H}''}{2} - \theta^2\mathcal{H}'$$

$$\frac{2\mathcal{H}^{m+1}}{m-1} = -\left(\frac{\mathfrak{N}}{m(m-1)} - 1\right)\mathcal{H}^{m} + \frac{2\theta^2\mathcal{H}^{m-1}}{m-1} - \theta^2\mathcal{H}^{m-2}.$$

$\mathcal{H}(-1)$ est nul, comme $\mathcal{H}(1)$ à cause du facteur $s^2 - 1$ dans $\mathcal{H}$.

404. — Les formules de récurrence des n°s **401** et **402**, se simplifient un peu, et donnent

$$(83) \qquad G_{m+1} = \frac{(4m\theta + m(m-1) - \mathfrak{N})\,G_m - 2\theta(m-1)\,G_{m-1}}{2m(m+1)}$$

d'où l'on tire

$$= \frac{4\theta - \mathfrak{N}}{4}\,G_1$$

$$= \frac{32\theta^2 - 12\theta\mathfrak{N} + \mathfrak{N}(\mathfrak{N} - 2)}{48}\,G_1$$

$$= \frac{384\theta^3 - 176\theta^2\mathfrak{N} + 24\theta\mathfrak{N}^2 - \mathfrak{N}^3 + 96\theta^2 - 72\theta\mathfrak{N} + 8\mathfrak{N}^2 - 12\mathfrak{N}}{8.144}\,G_1.$$

etc. On a d'ailleurs

$$J_0(1) = o, \qquad J_1(1) = -G_1(1) = -\mathcal{H}'(-1).$$

De là on tire

$$J_2 = + \frac{\mathfrak{N}}{4} G_1$$

$$J_3 = + \frac{\mathfrak{N}^2 - 2\mathfrak{N} - 16\,\theta^2}{48} G_1$$

$$J_4 = \frac{G_1}{8.144} \left\{ \begin{array}{l} 384\,\theta^4 - 112\,\theta^2\mathfrak{N} + 24\,\theta\mathfrak{N} + \mathfrak{N}^3 \\ - 96\,\theta^2 - 8\,\mathfrak{N}^2 + 12\,\mathfrak{N} \end{array} \right\}$$

Portées dans l'équation 81, ces valeurs donnent (84)

$$\mathcal{E}(1 + \varepsilon =) \frac{2}{\theta^3} G_1 \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ + \left[\varepsilon \frac{\mathfrak{N}}{2} + \frac{\varepsilon^2 \mathfrak{N}^2}{2.4} \ldots\right] \log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \\ + \varepsilon \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} - \frac{3\mathfrak{N}}{4} \\ - \frac{\mathfrak{N}^2 - 2\mathfrak{N} - 16\,\theta^2}{12} \\ + 4 J_4 + \ldots + \frac{2^{m-1}}{m-2} J_m + \ldots \end{array} \right] \end{array} \right.$$

Lorsque θ est connu, $\mathfrak{N}$ s'en déduit et cette formule permet le calcul complet de la fonction $\mathcal{E}$ près de la ligne des foyers.

405. Troisième forme de l'intégrale d'émission. — On pourrait enfin attaquer la question d'une manière un peu différente, en cherchant directement le développement de l'intégrale d'émission suivant les puissances de θ. L'équation 13, à laquelle satisfont $\mathcal{E}(s_1)$ et $\mathcal{H}(s_2)$, développée suivant les puissances de θ^2, nous a donné la série des équations (36), — (n° **386**), p. 343 — qui définit un développement de la fonction $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{H}$ suivant les puissances paires de θ seules. Le première intégrale $\mathcal{H}$, valable sur la surface des ellipsoïdes a été obtenue en partant de la fonction de Legendre P_n, valable sur la surface de la sphère $(-1 \leqslant s_2 \leqslant +1)$. On obtiendrait la seconde intégrale de notre problème, en partant de la seconde intégrale Q_n valable de $+1$ à l'infini. La forme la plus simple est,

$$Q_n(s_1) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial s_1^n}\left((s_1^2 - 1)^n \log \frac{s_1 + 1}{s_1 - 1}\right) - \frac{1}{2} P_n(s) \log \frac{s_1 + 1}{s_1 - 1};$$

la forme développée est

$$\ldots) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} P_n(s_1) \log \frac{s_1+1}{s_1-1} \\ - \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q} + (\mathcal{Q} - 1) \frac{(n+1)!}{1^2 (n-1)!} \frac{s_1 - 1}{2} + \left(\mathcal{Q} - 1 - \frac{1}{2}\right) \frac{(n+2)!}{(2!)^2 (n-2)!} \left(\frac{s_1-1}{2}\right)^2 \\ + \left(\mathcal{Q} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \frac{(n+3)!}{(3!)^2 (n-3)!} \left(\frac{s_1-1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots \\ + \frac{1}{n} \cdot \frac{(2n-1)!}{[(n-1)!]^2} \left(\frac{s_1-1}{2}\right)^{n-1}. \end{array} \right. \end{array} \right)$$

où l'on a

$$\mathcal{Q} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Cambr. Math. Trip., II, 1898).

406. — Cette forme est, comme on voit, analogue à la seconde que nous avons adoptée pour l'intégrale $\mathcal{E}(s_1)$; elle conduirait à un développement directement ordonné suivant les puissances de θ^2. Mais la recherche des intégrales de même caractère des équations (36) ne nous apprendrait probablement rien de nouveau et n'irait pas sans difficultés.

En outre, sous cette forme, l'intégrale apparait comme développée suivant les puissances paires de θ seulement, tandis que notre intégrale d'émission contient certainement aussi les puissances impaires. Par conséquent, pour isoler l'intégrale d'émission de l'intégrale d'absorption, il faut ajouter au développement pair en θ un développement impair qui satisfasse aussi à l'équation (13)

$$W = \theta W_0 + \theta^3 W_2 + \ldots + \theta^{2p+1} W_{2p} + \ldots$$

les W satisfaisant aux mêmes équations (36) que les U de même indice, mais avec des constantes d'intégration différentes, à choisir de manière à obtenir l'intégrale d'émission pure.

407. Champ extérieur. — Les formules [1] qui définissent le

[1] Deux fautes d'impression doivent être corrigées page 330 et page 332 ;

champ sont

$$
(14) \qquad M_3 = \frac{1}{f} \frac{\mathcal{E}(s_1) \cdot \mathcal{H}(s_2)}{\sqrt{1 - s_2^2}\sqrt{s_1^2 - 1}} e^{-\frac{\theta\Omega t}{f}}
$$

$$
(15) \qquad \begin{cases} E_1 = \dfrac{\Omega}{\theta f} \dfrac{\mathcal{E}(s_1) \cdot \mathcal{H}'(s_2)}{\sqrt{s_1^2 - 1}\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} e^{-\frac{\theta\Omega t}{f}} \\ E_2 = -\dfrac{\Omega}{\theta f} \dfrac{\mathcal{E}'(s_1) \cdot \mathcal{H}(s_2)}{\sqrt{1 - s_2^2}\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} e^{-\frac{\theta\Omega t}{f}} \end{cases}
$$

et on doit en prendre seulement le terme réel, ou le facteur de $\sqrt{-1}$ dans le terme imaginaire.

Lorsque θ est réel, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ sont tous deux réels ; les numérateurs sont bien les produits d'une fonction de s_1 par une fonction de s_2.

Si θ^2 est réel positif ou négatif, $\mathcal{H}(s^2)$ est encore entièrement réel : et la décomposition des trois numérateurs en facteurs subsiste ; lorsque θ est imaginaire pure les forces électriques sont l'une en avance, l'autre en retard d'un quart de période sur la force magnétique.

408. — Mais, si θ est complexe, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{H}$ deviennent aussi complexes :

$$
(I) \qquad \begin{cases} \theta = \theta_1 + \theta_2\sqrt{-1}, \\ \mathcal{E}(s_1) = \mathcal{E}_1(s_1) + \sqrt{-1}\,\mathcal{E}_2(s_1), \\ \mathcal{H}(s_2) = \mathcal{H}_1(s_2) + \sqrt{-1}\,\mathcal{H}_2(s_2), \end{cases}
$$

page 330 : les formules qui précèdent l'é uation 10 doivent être écrite

$$
\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{s_1^2 - 1}{s_1^2 - s_2^2}} = \frac{1}{f\sqrt{(1 - s_2^2)(s_1^2 - s_2^2)}}
$$

$$
\frac{1}{\rho}\sqrt{\frac{1 - s_2^2}{s_1^2 - s_2^2}} = \frac{1}{f\sqrt{(s_1^2 - 1)(s_1^2 - s_2^2)}}
$$

Page 332, formule (15), les dénominateurs sont incorrects ; les formules exactes sont celles du (n° **407**).

et les parties réelles des expressions 14 et 15 deviennent (II)

$$M_3 = \frac{e^{-\frac{\theta_1 \Omega t}{f}}}{f\sqrt{1 - s_2^2}\sqrt{s_1^2 - 1}} \left\{ \begin{array}{l} (\mathcal{E}_1 \mathcal{H}_1 - \mathcal{E}_2 \mathcal{H}_2) \cos \frac{\theta_2 \Omega t}{f} \\ + (\mathcal{E}_1 \mathcal{H}_2 + \mathcal{E}_2 \mathcal{H}_1) \sin \frac{\theta_2 \Omega t}{f} \end{array} \right.$$

$$E_1 = \frac{\Omega e^{-\frac{\theta_1 \Omega t}{f}}}{f(\theta_1^2 + \theta_2^2)\sqrt{s_1^2 - 1}\sqrt{s_2^2 - s_1^2}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (\mathcal{E}_1 \mathcal{H}'_1 - \mathcal{E}_2 \mathcal{H}'_2)\theta_1 \\ + (\mathcal{E}_1 \mathcal{H}'_2 + \mathcal{E}_2 \mathcal{H}'_1)\theta_2 \end{array}\right] \cos \frac{\theta_2 \Omega t}{f} \\ + \left[\begin{array}{l} -(\mathcal{E}_1 \mathcal{H}'_1 - \mathcal{E}_2 \mathcal{H}'_2)\theta_2 \\ + (\mathcal{E}_1 \mathcal{H}'_2 + \mathcal{E}_2 \mathcal{H}'_1)\theta_1 \end{array}\right] \sin \frac{\theta_2 \Omega t}{f} \end{array} \right.$$

$$E_2 = \frac{-\Omega e^{-\frac{\theta_1 \Omega t}{f}}}{f(\theta_1^2 + \theta_2^2)\sqrt{1 - s_2^2}\sqrt{s_1^2 - s_2^2}} \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} (\mathcal{E}'_1 \mathcal{H}_1 - \mathcal{E}'_2 \mathcal{H}_2)\theta_1 \\ + (\mathcal{E}'_1 \mathcal{H}_2 + \mathcal{E}'_2 \mathcal{H}_1)\theta_2 \end{array}\right] \cos \frac{\theta_2 \Omega t}{f} \\ + \left[\begin{array}{l} -(\mathcal{E}'_1 \mathcal{H}_1 - \mathcal{E}'_2 \mathcal{H}_2)\theta_2 \\ + (\mathcal{E}'_1 \mathcal{H}_2 + \mathcal{E}'_2 \mathcal{H}_1)\theta_1 \end{array}\right] \sin \frac{\theta_2 \Omega t}{f} \end{array} \right.$$

ou, en séparant la partie réelle de la partie imaginaire

409. — Lorsque θ, est connu, on peut employer utilement dans ces formules la première forme d'intégrale $\mathcal{E}(s_1)$, (formule 59, p. 350; ou formule 63, p. 351). Prenons cette dernière, pour avoir l'allure à grande distance, et posons

$$\mathcal{H}' = 1 ; \qquad \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + i\mathfrak{N}_2 ;$$

il vient (III)

$$(s_1) = e^{\theta_1 s_1} \frac{\cos \theta_2 s_1 + i \sin \theta_2 s_1}{(\theta_1^2 + \theta_2^2)^2} (\theta_1^2 - \theta_2^2 - 2\theta_1\theta_2 i) \left[1 - \frac{\theta_1 - \theta_2 i}{\theta_1^2 + \theta_2^2} \frac{\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 i}{2s_1} + \dots \right]$$

$$) = \frac{e^{\theta_1 s_1}}{(\theta_1^2 + \theta_2^2)^2} \left[\begin{array}{l} \left[(\theta_1^2 - \theta_2^2) \cos \theta_2 s_1 + 2\theta_1\theta_2 \sin \theta_2 s_1 \right] \left[1 - \frac{\theta_1 \mathfrak{N}_1 + \theta_2 \mathfrak{N}_2}{2s_1(\theta_1^2 + \theta_2^2)} + \dots \right] \\ + \left[(\theta_1^2 - \theta_2^2) \sin \theta_2 s_1 - 2\theta_1\theta_2 \cos \theta_2 s_1 \right] \left[+ \frac{\theta_1 \mathfrak{N}_2 - \theta_2 \mathfrak{N}_1}{2s_1(\theta_1^2 + \theta_2^2)} + \dots \right] \end{array} \right]$$

$$) = \frac{e^{\theta_1 s_1}}{(\theta_1^2 + \theta_2^2)^2} \left[\begin{array}{l} \left[(\theta_1^2 - \theta_2^2) \sin \theta_2 s_1 - 2\theta_1\theta_2 \cos \theta_2 s_1 \right] \left[1 - \frac{\theta_1 \mathfrak{N}_1 + \theta_2 \mathfrak{N}_2}{2s_1(\theta_1^2 + \theta_2^2)} + \dots \right] \\ - \left[(\theta_1^2 - \theta_2^2) \cos \theta_2 s_1 + 2\theta_1\theta_2 \sin \theta_2 s_1 \right] \left[+ \frac{\theta_1 \mathfrak{N}_2 - \theta_2 \mathfrak{N}_1}{2s_1(\theta_1^2 + \theta_2^2)} + \dots \right] \end{array} \right]$$

Rappelons que l'exponentielle qui apparaît dans M_3, E_1, E_2, est en réalité $e^{\theta_1\left(s_1 - \frac{\Omega t}{f}\right)}$ et que les expressions ne sont valables à chaque instant t que jusqn'à la distance définie par $s_1 = \frac{\Omega t}{f}$, si l'origine du temps coïncide avec la fin de l'action des sources étrangères qui ont servi à provoquer les vibrations propres de l'ellipsoïde. Pendant cette action le champ dû à l'ellipsoïde n'est plus exclusivement émissif ; il est au moins en partie absorbant, ce qui correspond à des valeurs négatives de θ_1, et il faut y ajouter le champ des sources, à distance finie ou non ; nous ne nous en occuperons pas. Nous n'examinerons pas non plus le mode de propagation du front de l'onde dans le cas d'une discontinuité.

Les formules que nous venons d'écrire donnent, avec une approximation suffisante, le champ pour de grandes valeurs de s_1. On peut s'en servir pour l'étude des ellipsoïdes peu différents de la sphère.

410. Vibrations propres de l'ellipsoïde. — La composante de la force électrique tangente à un ellipsoïde $s_1 = \sigma$, est la force électrique E_2 dont nous avons donné l'expression (15) (n° **407**). Dans l'ellipsoïde infiniment conducteur vibrant librement, cette force tangente doit être nulle. Les vibrations propres de rang n correspondant à chaque valeur de $\mathfrak{M}$ (n° **382**) sont donc données par l'équation correspondante

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1}\right)_{s_1 = \sigma} = o.$$

L'amortissement et la période sont définis par la partie réelle et la partie imaginaire de chacune des racines θ de cette équation.

Pour θ complexe, cette équation équivaut bien aux deux équations

$$\left(\frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial s_1}\right)_{s_1 = \sigma} = o, \qquad \left(\frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial s_1}\right)_{s_1 = \sigma} = o$$

auxquelles conduit la forme développée de E_2 écrite au n° **408**.

La recherche, que nous nous proposons, de l'amortissement et de la période propre des ellipsoïdes a toujours une solution, pour tous les ellipsoïdes ; mias la recherche inverse, des ellipsoïdes ayant un

amortissement et une période donnés serait généralement impossible ; il faudrait, en effet, se donnant θ, trouver une racine *réelle* $s_1 = \sigma$, de l'équation $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1} = o$, ce qui n'est évidemment possible que par exception. Pour rendre le problème moins exceptionnel, il faudrait se donner seulement l'amortissement θ_1 ou la période θ_2, et chercher l'ellipsoïde. Par exemple, pour de faibles amortissements donnés θ_1, d'après ce que nous verrons plus loin (n° **426**) qu'on pourra en général trouver des ellipsoïdes de périodes variées, d'autant plus nombreux probablement que l'amortissement donné est moindre. Pour des périodes données par θ_2 (par la longueur d'onde), pas trop différentes de $\theta_2 = \frac{in\pi}{2}$ pour la vibration de rang n, on pourra aussi en général trouver des ellipsoïdes et des amortissements correspondants ; mais je ne sais si $i\theta_2$ peut être indifféremment supérieur ou inférieur à $\frac{n\pi}{2}$.

411. — Sans insister davantage sur ces indications générales, procédons au développement de l'équation qui donne les vibrations propres :

En dérivant l'équation (73) et en groupant les termes, on obtient le développement suivant (85)

$$
= \frac{2}{\theta^3}\left[\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{(s_1+1)^2} + \frac{1}{(s_1-1)^2}\right] G_0 \\
&- \left[\frac{1}{s_1+1} + \frac{1}{s_1-1}\right] G'_0 \\
&+ \left[2s_1(\theta G_1 - G_2) + (s_1^2 - 1)(\theta G'_1 - G'_2)\right] \log \frac{s_1+1}{s_1-1}. \\
&+ 2\left[\theta G'_0 - G'_1 - \theta G_1 + G_2\right] \\
&+ 4s_1\left[\theta G_2 - G_3\right] + 2(s_1^2 - 1)(\theta G'_2 - G'_3) \\
&+ \ldots \\
&+ (\theta G_{m-1} - G_m)\left\{\begin{aligned}&\frac{(m-1)(s_1^2-1)\left[(s_1+1)^{m-3} - (s_1-1)^{m-3}\right]}{m-2} \\ &+ \frac{(s_1+1)^{m-1} - (s_1-1)^{m-1}}{m-2}\end{aligned}\right\} \\
&+ (\theta G'_{m-1} - G'_m)(s_1^2 - 1)\frac{(s_1+1)^{m-2} - (s_1-1)^{m-2}}{m-2} \\
&+ \ldots
\end{aligned}\right]
$$

G′ désigne la dérivée $\frac{\partial G}{\partial s_1}$ et on a

$$\theta G'_m - G_m = -\frac{1}{m!}\left[\begin{array}{l} -\mathcal{H}^{(m+1)} + \frac{m}{1}\frac{m-1}{2}\theta^2\mathcal{H}^{(m-1)} \\ + \dots + \frac{m!}{p!\,(m-p)!}(p-1)\,\theta^p\mathcal{H}^{(m-p+1)} \\ + \dots + (m-1)\,\theta^m\mathcal{H}'. \end{array}\right.$$

412. Ellipsoïdes allongés. — Pour les ellipsoïdes allongés, obtient facilement, au moyen de la formule (81), l'équation

$$(86)\quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} = \frac{2}{\theta^3}\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \theta^2\mathcal{H} - \mathcal{H}'' \\ + \varepsilon\left[\theta^2\mathcal{H} - \mathcal{H}'' + 2\mathcal{H}''' - 2\theta^2\mathcal{H}'\right] \end{array}\right] \log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \\ + \frac{\mathcal{H}}{\varepsilon^2} + \frac{\mathcal{H}}{4} - \theta^2\mathcal{H} + \frac{\mathcal{H}'}{2} + \frac{5}{2}\mathcal{H}'' \\ + \frac{2}{3}\left(-\mathcal{H}''' + 3\theta^2\mathcal{H} + 2\theta^3\mathcal{H}'\right) \\ + \dots + \frac{2^{m-1}}{m-2}J_m + \dots \end{array}\right.$$

et ensuite par la formule 84 (p. 362) :

$$(87)\quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \varepsilon} = \frac{2}{\theta^3}G_1\left[\begin{array}{l} \left(\frac{\mathfrak{M}}{2} + \varepsilon\frac{\mathfrak{M}^2}{4}\right)\log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} \\ + \frac{1}{2} - \frac{13\,\mathfrak{M}}{12} - \frac{\mathfrak{M}^2}{12} + \frac{4}{3}\theta^2 \\ + 4J_4 + \dots + \frac{2^{m-1}}{m-2}J_m + \dots \end{array}\right]$$

Posant

$$\log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{1}{\eta}$$

où η désigne une quantité très petite avec ε, l'équation aux pério

propres est

$$\frac{\mathfrak{N}}{2} + \varepsilon \frac{\mathfrak{N}^2}{4} + \eta \left[\frac{1}{2} - \frac{13}{12}\mathfrak{N} - \frac{\mathfrak{N}^2}{12} + \frac{4}{3}\theta^2 + 4 J_4 + ..\right] = 0. \tag{88}$$

Nous la discuterons plus loin (n° **425**).

413. — Développement suivant les puissances de θ. — Pour la recherche des vibrations propres des divers ellipsoïdes, il importe d'obtenir le développement des équations (74) et (75) suivant les puissances croissantes de θ. Voulant aboutir au calcul numérique, nous développerons avec quelque détail les formules nécessaires, malgré leur longueur.

Nous avons déjà posé (n° **386**)

$$y = Y_0 + \theta^2 Y_2 + \theta^4 Y_4 + \ldots..$$

et nous connaissons les développements des Y en s_1 ; nous en déduisons facilement ceux des

$$H_{2p} = (1 - s_1^2)\, Y_{2p}\,(s_1)$$

et nous écrivons

$$\mathcal{H}\,(s_1) = H_0\,(s_1) + \theta^2 H_2\,(s_1) + \theta^4 H_4\,(s_1) + \ldots.. \tag{89}$$

Remarque. — Le mode de calcul de $N_2, N_4, \ldots$ de proche en proche, indiqué au n° **381**, a le grand avantage de montrer que $Y_0, Y_2, Y_4, \ldots$ sont des polynômes de degrés $n-1$, $n+1$, $n+3, \ldots$; $H_0, H_2, H_4, \ldots$ sont donc des polynômes de degrés $n+1$, $n+3$, $n+5, \ldots$, dont les dérivées $(n+2)^e\,(n+4)^e$, $(n+6)^e$ sont respectivement nulles, quel que soit s. Les développements qui suivent s'arrêtent donc en s, quand on ne prend qu'un nombre limité de termes en θ. Il serait intéressant de mettre ce caractère en évidence directement et d'une manière simple sur les formules générales (34) ou (37) qui définissent les $\mathfrak{N}$.

414.— Indiquons par des accents les dérivées des H (s_1), par rapport à s_1, et rappelons par l'indice $-s_1$ à la parenthèse, que dans les formules finales, il faudra changer s_1 en $-s_1$; il vient après

quelques transformations :

$$
(90)\quad \theta G_{m-1} - G_m = \frac{1}{m!}\left[
\begin{aligned}
&- H_0^{(m)} \\
&+ \theta^2\left(- H_2^{(m)} + \frac{m(m-1)}{2} H_0^{(m-2)}\right) \\
&+ \frac{\theta^3}{3}\, m(m-1)(m-2)\, H_0^{(m-3)} \\
&+ \theta^4\left(- H_4^{(m)} + \frac{m(m-1)}{2} H_2^{(m-2)}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{8} H_0^{(m}\right) \\
&+ \theta^5\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{3} H_2^{(m-3)}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{m(m-1)\dots(m-4)}{30} H_0^{(m-5}\right) \\
&+ \theta^6\left(- H_6^{(m)} + \frac{m(m-1)}{2} H_4^{(m-2)}\right. \\
&\qquad + \frac{m(m-1)\dots(m-3)}{8} H_2^{(m-4} \\
&\qquad \left. + \frac{m(m-1)\dots(m-5)}{144} H_0^{(m-}\right) \\
&+ \theta^7\left(\frac{m(m-1)(m-2)}{3} H_4^{(m-3)}\right. \\
&\qquad + \frac{m(m-1)\dots(m-4)}{30} H_2^{(m-} \\
&\qquad \left. + \frac{m(m-1)\dots(m-6)}{840} H_0^{(m-7)}\right) \\
&+ \dots
\end{aligned}
\right]
$$

En s'arrêtant au terme en θ^4 on a :

$$
\theta G'_{m-1} - G'_m = \frac{1}{m!}\left[
\begin{aligned}
&- H_0^{(m+1)} + \theta^2\left(- H_2^{(m+1)} + \frac{m(m-1)}{2} H_0^{(m-}\right. \\
&+ \frac{\theta^3}{3}\, m(m-1)(m-2)\, H_0^{(m-2)} \\
&+ \theta^4\left[- H_4^{(m+1)} + \frac{m(m-1)}{2} H_2^{(m-1)}\right. \\
&\qquad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{8} H_0^{(m-}
\end{aligned}
\right.
$$

415. — Ces formules permettent d'ordonner l'équation (85) suivant les puissances de θ. Quel que soit le numéro d'ordre n de la vibration, et la valeur de $\mathfrak{N}$ correspondante, tous ces développements en θ sont des séries. La discussion du nombre des racines θ qui correspondent aux vibrations de rang n, et de leur caractère, est inabordable.

On ne connait déjà pas pour la sphère les propriétés générales de ces racines, en particulier la distribution des racines de rang n par rapport à toutes celles de rang moindre. Tout ce qu'on sait, par les propriétés des équations algébriques de degré impair, c'est qu'une au moins des racines de rang impair est réelle, et que la vibration correspondante est exponentielle pure, sans oscillations.

Par analogie avec les propriétés de la sphère, nous admettrons que le nombre des racines θ qui correspond au n^e nombre $\mathfrak{N}$, à celui qui commence par $n(n+1)$, est égal à n, et que ces racines ont en général une partie réelle négative et une partie imaginaire.

Lorsque les θ ont un module assez petit, il suffira de prendre les premiers termes de la série en θ ; nous nous arrêterons à θ^4, ce qui donne : (91)

$$\frac{\theta^3}{2}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial s_1} = \left[\frac{1}{(s_1+1)^2} + \frac{1}{(s_1-1)^2}\right]\left[H_0 + \theta^2 H_2 + \theta^4 H_4\right]$$

$$+ \left[\frac{1}{s_1+1} + \frac{1}{s_1-1}\right]\left[H_0' + \theta^2 H'_2 + \theta^4 H_4'\right]$$

$$+ \log\frac{s_1+1}{s_1-1}\left[\begin{array}{l} s_1\left(-H_0'' + \theta^2(-H_2'' + H_0) + \theta^4(-H_4'' + H_2)\right) \\ -\frac{s_1^2-1}{2}\left(-H_0''' + \theta^2(-H_2''' + H_0') + \theta^4(-H_4''' + H'_2)\right)\end{array}\right]$$

$$+ 2\left[+H_0'' + \theta^2 H_2'' + \theta^4 H_4'' - \frac{1}{2}\left(-H_0'' + \theta^2(-H_2'' + H_0) + \theta^4(-H_4'' + H_2)\right)\right]$$

$$+ \frac{s_1}{3}\,2\left[-H_0''' + \theta^2(-H_2''' + 3H_0') + 2\theta^3 H_0 + \theta^4(-H_4''' + 3H_2')\right]$$

$$+ \ldots\ldots$$

Pour les vibrations propres de la sphère, le facteur α, qui joue le rôle de $\frac{\theta}{f}$ dans l'exposant, est fini ; par conséquent pour les

ellipsoïdes très peu différents de la sphère, pour lesquels f est très petit, θ est aussi très petit. Cette équation, en y faisant $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1}$ nul pour la valeur très grande de s_1 qui caractérise l'ellipsoïde quasi-sphérique, permettra de calculer ses vibrations propres. On devra d'ailleurs employer au calcul des H les formules de récurrence complètes (36) n° **386** ; la remarque du n° **413** montre que ce calcul se limite de lui-même.

Mais ce ne sont pas ces ellipsoïdes qui attireront principalement notre attention.

REMARQUE. — On peut aussi développer $\mathcal{H}(\xi)\, e^{\theta(s_1+\xi)}$ dans l'intégrale 69 suivant les puissances de θ, avant d'intégrer ; on obtient alors les mêmes développements, ordonnés suivant les puissances de θ.

416. Ellipsoïdes très allongés. — Pour les ellipsoïdes très allongés s_1 est à peine supérieur à 1, et en posant dans l'équation précédente

$$s_1 - 1 = \varepsilon,$$

et en conservant seulement les termes les plus importants on obtient

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1} = \frac{2}{\theta^3}\left\{\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon^2}(H_0 + \theta^2 H_2 + \theta^4 H_4) + \frac{1}{\varepsilon}(H_0' + \theta^2 H_2' + \theta^4 H_4') \\
&+ \log\left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right)\left\{\begin{aligned}&(1+\varepsilon)\left[-H_0'' + \theta^2(H_0 - H_2'') + \theta^4(H_2 - H_4'')\right] \\ &-\varepsilon\left[-H_0''' + \theta^2(H'_0 - H_2''') + \theta^4(H_2' - H_4''')\right]\end{aligned}\right. \\
&+ \frac{1}{4}(H_0 + \theta^2 H_2 + \theta^4 H_4) + \frac{1}{2}(H_0' + \theta^2 H_2' + \theta^4 H_4') \\
&+ 2(+H_0'' + \theta^2 H_2'' + \theta^4 H_4'') - \left[-H_0'' + \theta^2(-H_2'' + H_0) + \theta^4(-H_4'' \right. \\
&+ \frac{2}{3}\left[-H_0''' + \theta^2(3H_0' - H_2''') + 2\theta^3 H_0 + \theta^4(-H_4''' + 3H_2')\right] \\
&+ \ldots\ldots + \frac{2^{m-1}}{m-2}(\theta G_{m-1} - G_m) + \ldots
\end{aligned}\right.$$

Dans les G, et les H, s_1 doit être remplacé par $-(1+\varepsilon)$, (n° **400**) tous les H ayant $(s_1 - 1)$ en facteur sont nuls pour $s_1 = 1$; ils sont

donc petits de l'ordre de ε, et le premier terme est en réalité, comme le second, un terme en ε^{-1}, et le compense exactement.

Dans les lignes qui suivent la seconde, on remplace s_1 par 1, et on peut par conséquent effacer les H, qui sont alors nuls, mais non leurs dérivées.

Il reste ainsi (92)

$$\left|\begin{aligned}
&+\log\left(\frac{2}{\varepsilon}+1\right)\left\{\begin{aligned}&+\varepsilon\left[2H_0'''-H_0''+\theta^2(2H_2'''-H_2''-2H'_0)+\theta^4(2H_4'''-H''_4-2H'_2)\right]\\&-(H_0''+\theta^2 H_2''+\theta^4 H_4'')\end{aligned}\right\}\\
&+\frac{1}{2}(H_0'+\theta^2 H_2'+\theta^4 H_4')+\frac{5}{2}(H_0''+\theta^2 H_2''+\theta^4 H_4'')\\
&-\frac{2}{3}\left[H_0'''+\theta^2(H_2'''-3H_0')+\theta^4(H_4'''-3H_2')\right]\\
&+\ldots+\frac{2^{m-1}}{m-2}(\theta G_{m+1}-G_m)-\ldots
\end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation développée suivant les puissances de θ qui donnera les valeurs de $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1}$ en fonction de l'ellipticité ε. C'est bien celle que l'on obtiendrait directement en remplaçant dans l'équation du n° **412** les $\mathcal{H}$ par leurs développements en θ^2.

417. Formation des coefficients de l'équation 92. — Les H', H'', sont d'ailleurs faciles à tirer des formules récurrentes du n° **403** développées en θ^2.

Les formules de récurrence du premier terme H_0 sont ainsi :

$$2H_0'' = -n(n+1)H_0'$$

$$2H_0^{(m+1)} = -\left(\frac{n(n+1)}{m(m-1)}-1\right)(m-1)H_0^m$$

$$H_0^{(n+2)} = 0.$$

Celles du second terme H_2 sont :

$$2H_2'' = -N_2 H_0' - n(n+1)H_2'$$

$$2H_2''' = -\left(\frac{n(n+1)}{1.2}-1\right)H_2'' - \frac{N_2}{1.2}H_0'' + 2H_0'$$

...

$$\frac{2H_2^{m+1}}{m-1} = \left\{\begin{aligned}&-\left(\frac{n(n+1)}{m(m-1)}-1\right)H_2^m - \frac{N_2}{m(m-1)}H_0^m\\&+\frac{2H_0^{m-1}}{m-1}-H_0^{m-2}\end{aligned}\right.$$

D'une manière générale :

$$\frac{2 \cdot H_{2p}^{m+1}}{m-1} = \left\{ \begin{array}{l} H_{2p}^{m} - \frac{1}{m(m-1)} \left[n(n+1) H_{2p}^{m} + N_2 H_{2p-2}^{m} + \ldots + N_{2p} H_0^{m} \right] \\ + \frac{2}{m-1} H_{2p-2}^{m-1} - H_{2p-2}^{m-2} \end{array} \right.$$

D'après la remarque du n° (**413**) on n'a à appliquer ces formules de récurrence qu'un nombre limité de fois, quand on s'arrête à un certain rang du développement en θ (ici θ^4) :

$$H_2^{(n+4)} = H_4^{(n+6)} = H_6^{(n+8)} = \ldots = o.$$

418. — On peut choisir la constante arbitraire qui entre en facteur dans $\mathcal{H}(s_2)$ de diverses manières sans changer le résultat final ; il n'est pas nécessaire de conserver le choix qui nous a paru le plus simple pour le calcul de $y_1(s)$ et de $\mathfrak{N}$ (n° **384**). Or, G_1 ou $\mathcal{H}'$ est en facteur dans l'équation 87, dont les racines sont par conséquent indépendantes de $\mathcal{H}'$. La détermination la plus simple est alors celle qui rend $\mathcal{H}'(-1)$ égal à 1 quel que soit θ. Nous prendrons donc

$$H'_0 = 1, \quad H'_2 = H'_4 = H'_6 = \ldots = o$$

dans les formules précédentes, ce qui en simplifie notablement l'emploi.

Ayant ainsi les $H_{2p}^{m}(-1)$, on calculera numériquement les termes de rang m de l'équation (92), au moyen de la formule (90), arrêtée aussi aux termes en θ^4.

C'est ainsi qu'ont été calculés les tableaux numériques II, III à la fin du volume. L'équation ainsi formée donne les valeurs de $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1}$ pour de petites valeurs de θ, c'est-à-dire pour des longueurs d'onde très supérieures à la distance des foyers, et aussi au grand axe de l'ellipsoïde allongé. Cette équation pourra donc être utilisée pour étudier comment l'ellipsoïde allongé vibre sous l'influence d'ondes de grande longueur émanant de sources lointaines. Elle ne peut pas servir pour la recherche des vibrations propres de cet ellipsoïde,

pour lesquelles θ est évidemment de l'ordre du nombre entier n qui définit le nombre des nœuds échelonnés le long de l'axe.

419. Vibrations d'une tige rectiligne — Pour calculer les périodes propres des ellipsoïdes, il faut revenir aux développements complets du n° **412**. En première approximation. pour ε nul, l'équation (87) se réduit à

$$\mathfrak{M} = o;$$

elle donne les périodes propres de la ligne conductrice sans épaisseur, limitée aux deux foyers.

En nous reportant à l'équation 13, nous voyons que celle-ci se réduit alors à

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = \theta_0{}^2 U$$

dont l'intégrale générale est

$$U = C \cos i\theta_0 s + S \sin i\theta_0 s$$

θ_0 étant racine de $\mathfrak{M} = o$.

Or la valeur générale de $\mathfrak{M}$ a été choisie de manière qu'une intégrale particulière de l'équation (13) soit nulle pour $s = \pm 1$. Les valeurs de θ_0 qui satisfont à cette dernière condition sont comprises dans la formule générale

$$\theta_0 = \frac{ik\pi}{2}, \qquad k \text{ entier.}$$

On a alors

(93)
$$\begin{cases} \mathcal{H} = C \cos \dfrac{k\pi s}{2} & k \text{ impair} \\ \mathcal{H} = S \sin \dfrac{k\pi s}{2} & k \text{ pair} \end{cases}$$

Il reste à savoir comment on doit faire correspondre les k aux n le calcul numérique des racines des $\mathfrak{M}$ dont on a calculé les premiers coefficients, fournit pour $\mathfrak{M}_n$ une valeur de $\theta_0{}^2$ très voisine de $-\frac{n^2\pi^2}{4}$; les valeurs de k autres que n laissent dans le $\mathfrak{M}_n$ correspondant des résidus très considérables ; les autres racines du poly-

nome formé par les termes calculés des $\mathfrak{N}$, sont très grandes ([1]). Nous admettrons donc que la série $\mathfrak{N}_n$ n'a pas d'autre racine que $\theta_0^2 = -\frac{n^2\pi^2}{4}$.

RACINES IMPORTANTES DES $\mathfrak{N}_n$

n	θ_0^2	$\frac{n^2\pi^2}{4}$
1	— 2,467 4977	— 2,467 401
2	— 9,820 0822	— 9,869 604
3	— 21,482 743	— 22,206 610
4	— 40,581 501	— 39,478 418

Ces valeurs $-\frac{n^2\pi^2}{4}$ sont celles que feraient prévoir des considérations physiques; elles indiquent que le conducteur rectiligne limité aux foyers de notre système de coordonnées se divise en un nombre exact de demies-longueurs d'onde, lorsqu'il émet ses vibrations propres.

420. — L'intégrale générale étant

$$U_n = C \cos \frac{n\pi s}{2} + S \sin \frac{n\pi s}{2},$$

la fonction $\mathcal{E}$ qui définit l'état du milieu extérieur, pour $s > 1$ est aussi de cette forme, et la condition

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s} = 0, \qquad s = 1,$$

([1]) En s'arrêtant au terme en θ^6 dans $\mathfrak{N}$, ces polynomes du 3e degré en θ^2, ont chacun trois racines. Les deux racines autres que $-\frac{n^2\pi^2}{4}$ sont données dans le tableau suivant :

$n = 1$	+ 65,8	— 101,0
$n = 2$	139,65 + 151,2 i	139,65 — 151,2 i
$n = 3$	4,97 + 68,55 i	4,97 — 68,55 i
$n = 4$	— 24,965 + 191,975 i	— 24,965 — 191,975 i

et ces valeurs justifient pleinement les indications probables contenues dans le texte.

devient

$$\frac{n\pi}{2}\left(S\cos\frac{n\pi}{2} - C\sin\frac{n\pi}{2}\right) = o,$$

ou

$$C = o \qquad n \text{ impair},$$
$$S = o \qquad n \text{ pair}.$$

Il reste donc

$$(94)\qquad \begin{cases} \mathcal{E}(s) = S\sin\dfrac{n\pi s}{2} & n \text{ impair}, \\ \mathcal{E}(s) = C\cos\dfrac{n\pi s}{2} & n \text{ pair}. \end{cases}$$

ce qui donne finalement les valeurs suivantes du champ (n° **372**) :

n impair

$$(95)\qquad \begin{cases} M_3 = A\,\dfrac{\sin\dfrac{n\pi s_1}{2}\cos\dfrac{n\pi s_2}{2}}{f\sqrt{(1-s_2^2)(s_1^2-1)}}\,e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{\Omega t}{f}\sqrt{-1}}, \\ E_1 = A\sqrt{-1}\,\dfrac{\sin\dfrac{n\pi s_1}{2}\sin\dfrac{n\pi s_2}{2}}{f\sqrt{(s_1^2-1)(s_1^2-s_2^2)}}\,e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{\Omega t}{f}\sqrt{-1}}, \\ E_2 = -A\Omega\sqrt{-1}\,\dfrac{\cos\dfrac{n\pi s_1}{2}\cos\dfrac{n\pi s_2}{2}}{f\sqrt{(1-s_2^2)(s_1^2-s_2^2)}}\,e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{\Omega t}{f}\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

et n pair

$$(96)\qquad \begin{cases} M_3 = A\,\dfrac{\cos\dfrac{n\pi s_1}{2}\sin\dfrac{n\pi s_2}{2}}{f\sqrt{(1-s_2^2)(s_1^2-1)}}\,e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{\Omega t}{f}\sqrt{-1}}, \\ E_1 = -A\Omega\sqrt{-1}\,\dfrac{\cos\dfrac{n\pi s_1}{2}\cos\dfrac{n\pi s_2}{2}}{f\sqrt{(s_1^2-1)(s_1^2-s_2^2)}}\,e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{\Omega t}{f}\sqrt{-1}}, \\ E_2 = A\Omega\sqrt{-1}\,\dfrac{\sin\dfrac{n\pi s_1}{2}\sin\dfrac{n\pi s_2}{2}}{f\sqrt{(1-s_2^2)(s_1^2-s_2^2)}}\,e^{-\frac{n\pi}{2}\frac{\Omega t}{f}\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

421. — Discutons maintenant ces résultats. L'amplitude de la force électrique E_1 normale aux ellipsoïdes homofocaux, décroit à grande distance, à peu près comme s_1^{-2} ; celle de la force magnétique M_3 et de la force électrique E_2 tangente aux ellipsoïdes décroit à peu près comme s_1^{-1}. C'est le résultat ordinaire : à grande distance de la source, le champ magnétique et électrique tend à devenir transversal, puisque les hyperboles se confondent alors sensiblement avec leurs asymptotes.

Tout près du prolongement du fil rectiligne, on a

$$s_2 = 1 - \sigma_2 ;$$

en appelant σ_2 un très petit nombre positif. Le facteur qui dépend de s_2 se réduit à

$$(97) \quad \begin{cases} \pm \dfrac{n\pi}{2}\sqrt{\dfrac{\sigma_2}{2}} & \text{dans} \quad M_3, \\ \mp \dfrac{1}{\sqrt{s_1^2 - 1}} & \text{dans} \quad E_1 \\ \pm \dfrac{n\pi}{2}\sqrt{\dfrac{\sigma_2}{2(s_1^2 - 1)}} & \text{dans} \quad E_2. \end{cases}$$

Les composantes M_3 et E_2 deviennent nulles sur le prolongement du fil, comme il convient pour qu'il n'y ait pas de discontinuité ; la force électrique E_1, dirigée suivant le prolongement du fil conserve seule une amplitude finie.

422. — Tout près du fil rectiligne lui-même, on a

$$s_1 = 1 + \sigma_1.$$

Le facteur, qui dépend de s_1, se réduit à

$$(98) \quad \begin{cases} \pm \dfrac{1}{\sqrt{2\sigma_1}} & \text{dans} \quad M_3 \\ \pm \dfrac{1}{\sqrt{2\sigma_1(1 - s_2^2)}} & \text{dans} \quad E_1 \\ \dfrac{o}{\sqrt{1 - s_2^2}} & \text{dans} \quad E_2. \end{cases}$$

La composante électrique tangentielle E_2 est nulle, tout le long du fil, conformément aux conditions qu'on a écrites.

La force magnétique M_3 et la force électrique normale E_1 deviennent toutes deux infinies au contact du fil ; il faut en effet que la densité du courant et les densités électriques superficielles deviennent infinies dans le fil infiniment mince pour que l'intensité totale du courant et la charge électrique par unité de longueur du fil aient une valeur finie, nécessaire pour que le champ extérieur ait une amplitude finie.

423. — Le voisinage immédiat des deux extrémités mérite un examen plus attentif. On a à la fois.

$$s_1 = 1 + \sigma_1 \qquad \text{et} \qquad s_2 = 1 - \sigma_2 ;$$

le facteur qui dépend de s_1 et de s_2 devient alors

$$(99) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \pm \dfrac{n\pi}{4}\sqrt{\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}} & \text{dans} & M_3 \\ \pm \dfrac{1}{2\sqrt{\sigma_1}(\sigma_1 + \sigma_2)} & \text{dans} & E_1 \\ \pm \dfrac{n\pi}{4}\sqrt{\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}} & \text{dans} & E_2 \end{array} \right.$$

et la valeur de l'amplitude de toutes ces grandeurs dépend du rapport de σ_1 à σ_2.

En se reportant à la figure 56 (p. 329), il est facile de voir, dan le cas où le point M est tout près de F, que l'on a

$$r' = 2f - r \cos \text{MFF}'$$

d'où l'on déduit

$$2s_1 f = 2f + r(1 - \cos \text{MFF}')$$
$$2s_2 f = 2f - r(1 + \cos \text{MFF}')$$

et par conséquent, en désignant par F l'angle MFF',

$$\sigma_1 = \frac{r}{f}\sin^2\frac{F}{2}, \qquad \sigma_2 = \frac{r}{f}\cos^2\frac{F}{2},$$
$$\sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{r}{f}\cos F, \qquad \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{r}{f}.$$

L'amplitude de M_3 et de E_2 est indépendante de la distance r à l'extrémité ; elle ne dépend que de l'angle F du rayon vecteur avec le fil lui-même. Pour la force magnétique M_3 cette amplitude est proportionnelle à $\frac{n\pi}{4} \cot g \frac{F}{2}$, infinie le long du fil, nulle dans son prolongement.

Pour la force électrique tangente aux ellipsoïdes E_2, l'amplitude est proportionnelle à $\frac{n\pi}{4} \cos \frac{F}{2}$; nulle exactement sur le prolongement du fil ($F = \pi$) elle croît lorsque le rayon vecteur, partant du prolongement du fil, tourne pour se rabattre sur le fil ; le long du fil, elle est maximum, finie. Il semble que cela soit en contradiction avec la condition écrite à la surface du fil ; mais l'examen de la composante E_1 lève la contradiction.

Cette composante rayonnante E_1 a en effet une amplitude

$$\sqrt{\frac{f}{r}} \cdot \frac{1}{2 \sin \frac{F}{2}} \tag{100}$$

en raison inverse de $\sqrt{r}$, très grande à petite distance du bout du fil, surtout le long du fil lui-même ($F = o$). La force électrique totale reste donc normale à la surface du conducteur, malgré les valeurs finies de E_2.

424. Nécessité d'une seconde approximation. — L'ensemble de ces résultats donne déjà une idée d'ensemble de la distribution du champ électromagnétique autour d'une tige rectiligne mince vibrante, avec sa période propre et dans le voisinage de son extrémité. — Toutefois, au contact même de la tige, une certaine réserve est nécessaire. Nous avons en effet effacé le dernier terme $\frac{\mathfrak{N}U}{1-s^2}$, de l'équation complète

$$\frac{\partial^2 U}{\partial s^2} = \left(\theta^2 + \frac{\mathfrak{N}}{1 - s^2}\right) U,$$

dans l'examen du cas limite où $\mathfrak{N}$ est nul. Mais, ce cas, où le fil est infiniment mince, n'étant pas rigoureusement réalisable, $\mathfrak{N}$ sera

seulement très petit. Or les formules que nous avons trouvées pour les intégrales du cas limite montrent que le second facteur $\frac{U}{1-s^2}$ est généralement fini, — ce qui permet de négliger ce terme — sauf pour la fonction $\mathcal{E}(s_1)$ tout près de la surface du fil. On a en effet alors

$$\frac{\mathcal{E}(s_1)}{1-s_1^2} = -\frac{1}{2\sigma_1},$$

qui devient infini pour $\sigma_1 = o$ ou $s_1 = 1$.

Dans tous les cas réalisables, où la section de la tige vibrante est seulement très petite mais non nulle, $\mathfrak{N}$ est seulement très petit, et au voisinage immédiat de la tige, la simplification de l'équation en $\mathcal{E}$ n'est plus légitime; il faut conserver l'équation complète, et l'intégrale (73) dont nous avons déterminé dans ce chapitre la forme développée. La condition qui détermine les vibrations propres dépendant précisément de la fonction $\mathcal{E}$, la seconde approximation est tout à fait nécessaire, même pour les tiges les plus minces.

425. — Reportons-nous donc à l'équation (88), et dans celle-ci, posons comme seconde approximation

(101) $$\theta_n = \frac{n\pi i}{2} + \eta\theta'_n + \varepsilon\theta''_n$$

dans le premier terme $\mathfrak{N}$, et seulement

$$\theta_n = \frac{n\pi i}{2}$$

dans les termes qui ont déjà en facteur η et ε. Il vient

$$\theta''_n = o$$

(102) $$\theta'_n = -\frac{n\pi i}{2} \times \frac{\frac{1}{2} - \frac{n^2\pi^2}{3} + \ldots + \frac{2^{m-1}}{m-2} J_m + \ldots}{2N_2\frac{n^2\pi^2}{4} - 4N_4\left(\frac{n^2\pi^2}{4}\right)^2 + \ldots + (-1)^p\, 2p\, N_{2p}\left(\frac{n^2\pi^2}{4}\right)^p + \ldots}$$

Dans le cas limite actuel, on peut facilement déduire des formules de récurrence 77 (n° **404**) la valeur exacte du numérateur. On doit

y faire en effet, non seulement $s_1^2 = 1$, mais en outre $\mathfrak{N} = o$, ce qui les réduit à

$$(m+1)\,G_{m+1} - 2\theta\,G_m = \frac{m-1}{2m}\,(m\,G_m - 2\theta\,G_{m-1})$$

et

$$\theta = \frac{n\pi i}{2}.$$

On en tire, pour $m = 1$

$$2\,G_2 - 2\theta\,G_1 = o,$$

et par conséquent, de proche en proche

$$(m+1)\,G_{m+1} - 2\theta\,G_m = o$$

d'où

$$G_m = \frac{2\theta}{m}\,G_{m-1} = \frac{(2\theta)^{m-1}}{m\,!}\,G_1 = \frac{(n\pi i)^{m-1}}{m\,!}\,G_1\,;$$

puis

$$J_m = \theta\,G_{m-1} - G_m = \frac{(n\pi i)^{m-1}}{m\,!}\,\frac{m-2}{2}\,G_1.$$

Cette expression portée dans le numérateur, lui donne la forme

$$\frac{1}{2} - \frac{n^2\pi^2}{3} - i\,\frac{8n^3\pi^3}{2.\,4\,!} + \ldots\ldots + \frac{1}{2}\,\frac{(2n\pi i)^{m-1}}{m\,!} + \ldots$$

qui, multipliée par $4n\pi i$, devient

$$2n\pi i + \frac{(2n\pi i)^3}{3\,!} + \frac{(2n\pi i)^4}{4\,!} + \ldots + \frac{(2n\pi i)^m}{m\,!} + \ldots$$

ou

$$e^{2n\pi i} - 1 - \frac{(2n\pi i)^2}{2} = +\,2n^2\pi^2.$$

Il reste donc

$$\theta'_n = -\,\frac{n^2\pi^2}{4} \times \frac{1}{2N_2\,\frac{n^2\pi^2}{4} - 4N_4\,\frac{n^4\pi^4}{16} + 6\,N_6\,\frac{n^6\pi^6}{64} - \ldots}$$

Représentons par $\mathfrak{N}'$ la dérivée de $\mathfrak{N}$ par rapport à θ^2 :

$$\frac{\partial\mathfrak{N}}{\partial\theta^2} = N_2 + 2N_4\theta^2 + 3N_6\theta^4 + \ldots$$

Il vient enfin

$$\theta'_n = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\mathfrak{N}'}\right)_{\theta = \frac{n\pi i}{2}}.$$

Cette seconde approximation fait apparaitre l'amortissement, proportionnel à τ_1.

Remarque. — Les valeurs de θ pour les vibrations propres des tiges minces sont déjà tellement grandes que les développements tels que (92) arrêtés aux termes en θ^4, ne donneraient aucune idée du résultat. L'emploi de ces développements doit être limité aux problèmes qui comportent de petites valeurs de θ, tels que la vibration produite dans la tige par des ondes extérieures très longues.

426. — Donnons d'abord le tableau numérique des amortissements :

n	$\frac{n\pi}{2}$	$\frac{n^2\pi^2}{4}$	$2\mathfrak{N}'$		$-\theta'_n$
1	1,5708	2,467	0,8000 + 0,0226 — 0,0022 + 0,00013 — 0,0000033	= 0,8205	0,61
2	3,1416	9,869	0,571 + 0,077 + 0,004 — 0,002	= 0,650	0,77
3	4,7124	22,206	0,533 — 0,061 + 0,175 + 0,060	= 0,707	0,707
4	6,2832	39,478	0,519 — 0,094 + 0,061 + 0,139	= 0,625	0,800
5	7,8539	61,685	0,513 — 0,109 — 0,035	= 0,369	1,35
6	9,4248	88,826	0,509 — 0,119 + 0,024	= 0,414	1,21
7	10,9955	120,903	0,507 — 0,125 — 0,018	= 0,364	1,37
8	12,5664	157,914	0,505 — 0,130 + 0,011	= 0,386	1,30
9	14,1371	199,859	0,504 — 0,133 — 0,011	= 0,360	1,39
10	15,7079	246,74	00,503 — 0,135 + 0,009	= 0,377	1,33

Il est difficile de dire à quel degré sont approchés les amortissements ainsi calculés ; les valeurs de $\theta^2\,(-\,n^2\pi^2/_4)$ sont tellement grandes que la convergence arithmétique est peu accentuée, surtout pour n égal à 3 et à 4 ; et on peut se demander si la série $\mathfrak{N}'$ dont nous avons calculé les premiers termes est bien effectivement convergente pour ces valeurs de θ^2. Quoiqu'il en soit, l'amortissement des oscillations de rang pair, (nombre de lignes nodales) est toujours plus grand que celui des oscillations de rang impair voisines. Il semble y avoir une limite commune, probablement voisine de 1,45, pour n très grand.

Donc, quand on s'arrête aux termes proportionnels à η, la longueur de l'intervalle des foyers comprend encore un nombre exact de demies longueurs d'onde ; l'énergie émise devient sensible en même temps que η, et il en résulte un amortissement dont nous donnons ci-dessus les valeurs.

Quant à la relation entre η et ε, on s'en fera une idée par le tableau suivant :

2ε	10^{-10}	10^{-8}	10^{-6}	10^{-4}	10^{-2}
η	0,0775	0,0944	0,1204	0,167	0,272
$\sqrt{2\varepsilon}$	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}

où $\sqrt{2\varepsilon}$ est la valeur approchée du rapport du diamètre équatorial de la tige à sa longueur.

Précisons par deux exemples : celui d'un fil de 10 mètres de long et de 0,1 millimètre de diamètre et celui d'un large tube de même longueur et de 10 centimètres de diamètre :

n	$-\theta'$, $[\sqrt{2\varepsilon} = 10^{-5}]$	$-\theta'$, $[\sqrt{2\varepsilon} = 10^{-2}]$
1	0,0472	0 102
2	0,0600	0 129
3	0,055	0,119
4	0,062	0,134

on voit par là dans quelle énorme proportion il faut augmenter le diamètre des ellipsoïdes allongés pour doubler l'amortissement.

Cet amortissement est d'ailleurs encore très appréciable puisque même pour un fil fin, l'amplitude de la vibration fondamentale est réduite au tiers après une trentaine d'oscillations seulement [1].

[1] *Résultats de M. Abraham*, (Wied. Ann. 1898, n° 11). — De l'intégrale — inexacte à mon avis, voir p. 355) — que M. M. ABRAHAM a donnée pour l'extérieur, il a déduit, par un mode de calcul très artificiel, les résultats suivants, que je crois devoir citer ici, bien que méritant aussi peu de confiance que l'intégrale d'où ils dérivent.

Première approximation (p. 462, W. A.) Posons pour les ellipsoïdes allongés

$$\eta' = \frac{1}{4 \log \left(\frac{2l}{b}\right)}$$

b, petit axe de l'ellipsoïde;

427. Ellipsoïdes de même période que la ligne des foyers. — Les formules (93), (94) sont des solutions valables pour tout l'espace qui n'est pas extrêmement voisin de la ligne des foyers. Elles montrent plusieurs propriétés curieuses, dont je vais indiquer quelques-unes.

Autour de la ligne des foyers, il y a dans l'espace une infinité d'ellipsoïdes, de dimensions finies, dont la forme peut différer aussi peu que l'on veut de la forme sphérique, le long desquels E_2 est nul pour une vibration de rang déterminé.

Pour la vibration de rang n impair, tous ces ellipsoïdes sont donnés par

$$\cos\frac{n\pi s_1}{2} = 0, \qquad s_1 = \frac{2k+1}{n}, \qquad 2k+1 > n.$$

Pour ceux de rang pair,

$$\sin\frac{n\pi s_1}{2} = 0, \qquad s_1 = \frac{2k}{n}, \qquad 2k > n.$$

k désignant un nombre entier.

f, distance du centre au foyer;

τ_1', diffère peu de $\frac{1}{4}\tau_1$.

$$\theta = \frac{1}{4}(2\pi i - 9{,}74\,\tau_1'), \qquad n = 1$$

$$\theta = \frac{2}{4}(2\pi i - 6{,}23\,\tau_1', \qquad n = 2$$

$$\theta = \frac{n}{4}\,2\pi i - (9{,}66 + 4\log n)\,\tau_1', \qquad n > 2$$

Deuxième approximation (p. 464 W. A.)

$$\theta = \frac{1}{4}\,\frac{2\pi i - 9{,}74\,\tau_1' - 47{,}4\,\tau_1'^2}{1 + 5{,}6\,\tau_1'^2}, \qquad n = 1$$

$$\theta = \frac{1}{4}\,\frac{4\pi i - 6{,}23\,\tau_1' - 10{,}45\,\tau_1'^2}{1 + 3{,}3\,\tau_1'^2}, \qquad n = 2$$

$$\theta = \frac{1}{4}\,\frac{2\pi n i - [9{,}66 + 4\log n]\,\tau_1' - 2(4{,}8 + 2\log n)^2\,\tau_1'^2}{1 + \frac{4{,}8 + 2\log n}{n}\,\tau_1'^2}. \qquad n > 2$$

Ces résultats diffèrent, comme on voit, considérablement de ceux donnés dans le texte.

On peut donc construire un conducteur ayant la forme d'un quelconque de ces ellipsoïdes, au moyen duquel on réalisera *exactement* pour la vibration n correspondante le champ extérieur que donnerait la ligne des foyers. Cette vibration a un amortissement rigoureusement nul. Ce même ellipsoïde jouit encore de la même propriété pour toute la série des vibrations harmoniques $n = n_0 k'$ d'une certaine vibration principale n_0. Mais pour toutes les vibrations propres dont le rang n'est pas compris dans la série $n_0 k'$, le champ n'est plus donné par les formules 93 et 94 ; et la longueur d'onde n'est plus une fraction exacte du double de la distance des foyers ; l'amortissement n'est pas nul.

Le fait vraiment curieux, c'est que la valeur de s_1 pour ces ellipsoïdes peut être aussi grande que l'on veut, et que, par conséquent, ces ellipsoïdes peuvent différer aussi peu que l'on veut de la sphère. Cela concorde bien avec la remarque que nous avons faite au sujet de la distribution des amortissements et des périodes propres des vibrations des sphères (n° 365).

428. — De là résulte aussi une autre indication : Partant de la vitesse de propagation des *fronts d'ondes transverses* toujours égale à la vitesse de la lumière, on aurait pu croire, que dans les corps de révolution, la longueur d'onde diffère peu d'une fraction exacte de la longueur totale de la méridienne. Bien que la considération des *fronts d'onde* n'ait pas de rapport direct avec les vibrations propres, il est curieux de constater que la longueur de la méridienne des ellipsoïdes presque sphériques peut être incomparablement plus grande que le produit du rang de la vibration par sa longueur d'onde.

Dernière Remarque. — La période et l'amortissement de la vibration de rang n d'ellipsoïdes homofocaux ne varient pas dans un sens toujours le même à mesure que l'ellipticité diminue.

La période et l'amortissement sont des fonctions oscillantes de l'ellipticité.

Il serait curieux de connaître les ellipsoïdes d'amortissement maximum, — ceux de période maximum ou minimum ; de savoir aussi,

si la période $\frac{n\pi}{2}$ est un maximum, un minimum, ou une période moyenne. Tout cela suppose un ensemble de calculs numériques considérable et coûteux, car cela paraît bien difficilement abordable du seul point de vue analytique.

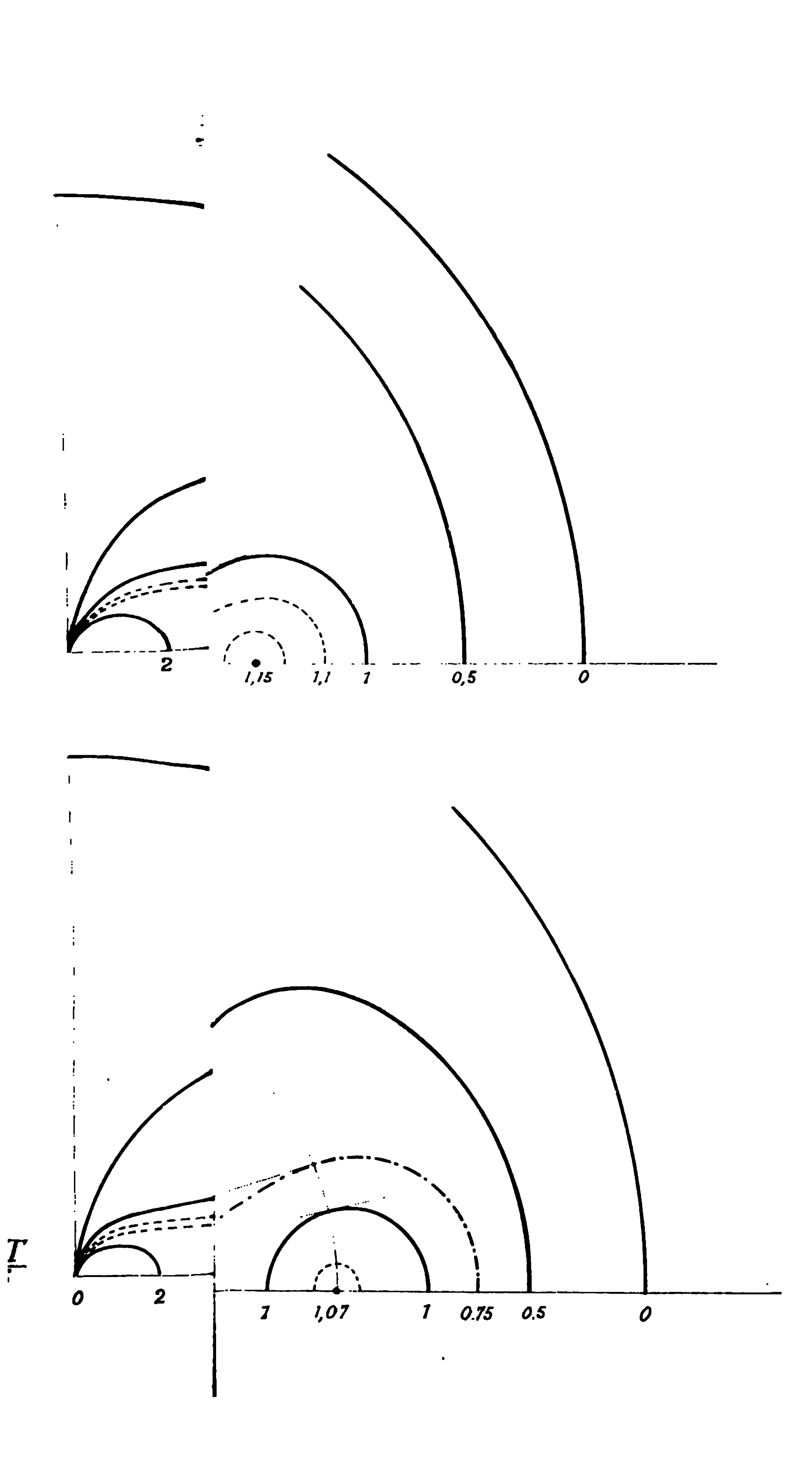

2
1,15
1,1
1
0,5
0
0
2
1
1,07
1
0.75
0.5
0

TABLEAU I

Coefficients de la fonction y_1

Série paire $n = 1$

$= 2 + 0,800.00\,\theta^{2} - 0,004.571.4\,\theta^{4} - 0,000.121.90\,\theta^{6} - 0,000.002.103,4\,\theta^{8} - 0,000.000.017.566,1\,\theta^{10}$

$= 1$

$= 0,100\ 00\,\theta^{2} + 0,002.285.7\,\theta^{4} + 0,000.060.952\,\theta^{6} + 0,000\ 001.051.7\,\theta^{8} + 0,000.000.008.783\,\theta^{10}$

$= 0,003.571.4\,\theta^{4} + 0,000.126.98\,\theta^{6} + 0,000\ 003.778.9\,\theta^{8} + 0,000.000.032\ 549\,\theta^{10}$

$= 0,000.066.138\,\theta^{6} + 0,000.002.886\ 0\,\theta^{8} + 0,000.000.054.377\,\theta^{10}$

$= 0,000.000.751.59\,\theta^{8} + 0,000.000.037.000\,\theta^{10}$

$= 0,000.000.005.781.5\,\theta^{10}$

Série impaire $n = 2$

$= 6,000.00 + 0,571.43\,\theta^{2} - 0,003.887.3\,\theta^{4} + 0,000.014.424\,\theta^{6} + 0,000\ 000.568.17\,\theta^{8}$

$= + 1,000.00$

$= + 0,071.429\,\theta^{2} + 0,000.647.88\,\theta^{4} - 0,000.002.404.0\,\theta^{6} - 0,000\ 000.094.695\,\theta^{8}$

$= + 0,001.984.1\,\theta^{4} + 0,000.029.449\,\theta^{6} + 0,000.000.162.66\,\theta^{8}$

$= + 0,000.030.063\,\theta^{6} + 0,000.000.566.33\,\theta^{8}$

$= + 0,000.000.289.06\,\theta^{8}$

Série paire $n = 3$

$= 12,000,00 + 0,533.33\,\theta^{2} + 0,001.364.8\,\theta^{4} + 0,000.118\ 25\,\theta^{6} - 0,000.001.373.7\,\theta^{8}$

$= 1,000.00$

$= - 5,000.00 + 0,233.33\,\theta^{2} - 0,000.682.38\,\theta^{4} - 0,000\ 059.125\,\theta^{6} + 0,000.000.686\ 83\,\theta^{8}$

$= - 0,277.78\,\theta^{2} + 0,009.642.7\,\theta^{4} - 0,000.003.803\,\theta^{6} - 0,000\ 005.093.4\,\theta^{8}$

$= - 0,006.313.1\,\theta^{4} + 0,000.018.310\,\theta^{6} + 0,000.000.389.24\,\theta^{8}$

$= - 0,000.080.938\,\theta^{6} + 0,000.002.053.4\,\theta^{8}$

$= - 0,000.000.674.48\,\theta^{8}$

TABLEAU I (*suite*)

Série impaire $n = 4$

$\mathfrak{M} =$	20,000	+ 0,519.48 θ^2	+ 0,001.190 2 θ^4	+ 0,000.013.150 θ^6	— 0,000.000.566.…
$b_1 =$	1,000				
$b_3 =$	— 2,333.3	+ 0,080.087 θ^2	— 0,000.198.37 θ^4	— 0,000.002.191.7 θ^6	+ 0,000.000.094…
$b_5 =$		— 0,106.06 θ^2	+ 0,002.063.0 θ^4	— 0,000.007.998.1 θ^6	— 0,000.000 159.…
$b_7 =$			— 0,002.039.6 θ^4	+ 0,000.027.142 θ^6	— 0,000.000 148.…
$b_9 =$				— 0,000.022.663 θ^6	+ 0,000.000.218 …
$b_{11} =$					— 0,000.000.166.…

Série paire $n = 5$

$\mathfrak{M} =$	30,000	+ 0,512.82 θ^2	+ 0,000.889 46 θ^4	— 0,000 003 116,6 θ^6
$a_0 =$	1,000			
$a_2 =$	— 14,000	+ 0,243.59 θ^2	— 0,000.444 78 θ^4	— 0,000.037.409 θ^6
$a_4 =$	21,000	— 1,017.1 θ^2	+ 0,011.594 θ^4	— 0,000.001.558 3 θ^6
$a_6 =$		0,807.69 θ^2	— 0,025.269 θ^4	+ 0,000.231,08 θ^6
$a_8 =$			0,013.462 θ^4	— 0,000.332.33 θ^6
$a_{10} =$				0,000.131.98 θ^6

Série impaire $n = 6$

$\mathfrak{M} =$	42,000	+ 0,509.09 θ^2	+ 0,000.669.88 θ^4	+ 0,000.001.015.0 θ^6
$b_1 =$	+ 1,000			
$b_3 =$	— 6,000	+ 0,081.818 θ^2	— 0,000.111.65 θ^4	— 0,000.000.169.17 θ^6
$b_5 =$	+ 6,600	— 0,287.27 θ^2	+ 0,002.332.0 θ^4	— 0,000 004.990 2 θ^6
$b_7 =$		+ 0,220.00 θ^2	— 0,005.411.1 θ^4	+ 0,000.034.338 θ^6
$b_9 =$			+ 0,003.235.3 θ^4	— 0,000.057.022 θ^6
$b_{11} =$				+ 0,000.028.380 θ^6

Série paire $n = 7$

$\mathfrak{M} =$	56,000	+ 0,506.79 θ^2	+ 0,000.517.47 θ^4	— 0,000.000 400,85 θ^6
$a_0 =$	1,000			
$a_2 =$	— 27,000	+ 0,246 61 θ^2	— 0,000.258 74 θ^4	— 0,000.000.200,43 θ^6
$a_4 =$	99,000	— 2,097.3 θ^2	+ 0,012.249 θ^4	— 0,000.022 822 θ^6
$a_6 =$	— 85,800	+ 4,345.2 θ^2	— 0,055.024 θ^4	+ 0,000.267.28 θ^6
$a_8 =$		— 2,523.53 θ^2	+ 0,076.515 θ^4	— 0,000.742.88 θ^6
$a_{10} =$			— 0,033.204 θ^4	+ 0,000.764.55 θ^6
$a_{12} =$				— 0,000.263.53 θ^6

TABLEAU I (*suite*)

Série impaire $n = 8$

$\mathfrak{N} =$	72,000	+ 0,505.26 θ^2	+ 0,000.409.94 θ^4	+ 0,000.000.180.16 θ^6
$b_1 =$	+ 1,000			
$b_3 =$	− 11,000	+ 0,082 456 θ^2	− 0,000.068 324 θ^4	− 0,000 000.030.027 θ^6
$b_5 =$	+ 28,600	− 0,536.49 θ^2	+ 0,002.442.8 θ^4	− 0,000.003.203.1 θ^6
$b_7 =$	− 20,429	+ 0,982.01 θ^2	− 0,010.307 θ^4	+ 0,000.037.803 θ^6
$b_9 =$		− 0,537.59 θ^2	+ 0,014.315 θ^4	− 0,000.110.32 θ^6
$b_{11} =$			− 0,006.399.9 θ^4	+ 0,000.121.97 θ^6
$b_{13} =$				− 0,000.046.376 θ^6

Série paire $n = 9$

$\mathfrak{N} =$	90,000	+ 0,504,20 θ^2	+ 0,000.332.00 θ^4	− 0,000.000.089.844 θ^6
$a_0 =$	1,000			
$a_2 =$	− 44,000	+ 0,247.90 θ^2	− 0,000.166.00 θ^4	− 0,000 000.044.922 θ^6
$a_4 =$	+ 286,00	− 3,512.61 θ^2	+ 0,012.539 θ^4	− 0,000 013.096 θ^6
$a_6 =$	− 572,00	+ 13,218 θ^2	− 0,094.557 θ^4	+ 0,000 278.71 θ^6
$a_8 =$	+ 347,29	− 18,197 θ^2	+ 0,240.56 θ^4	− 0,001.307.7 θ^6
$a_{10} =$		+ 8,268 71 θ^2	− 0,248.40 θ^4	+ 0,002 442.6 θ^6
$a_{12} =$			+ 0,089.877 θ^4	− 0,001 999.0 θ^6
$a_{14} =$				+ 0,000.599.18 θ^6

Série impaire $n = 10$

$\mathfrak{N} =$	110,000	+ 0,503.43 θ^2	+ 0,000.274.00 θ^4	+ 0,000.000.048.203 θ^6
$b_1 =$	+ 1,000			
$b_3 =$	− 17,333	+ 0,082.761 θ^2	− 0,000.045.666 θ^4	− 0,000.000.008.033 8 θ^6
$b_5 =$	+ 78,000	− 0,852 78 θ^2	+ 0,002.497 8 θ^4	− 0,000.002.189.7 θ^6
$b_7 =$	− 126,286	+ 2,715.59 θ^2	− 0,016.606 θ^4	+ 0,000.039.638 θ^6
$b_9 =$	+ 66,650.8	− 3,387.53 θ^2	+ 0,039.818 θ^4	− 0,000 180.39 θ^6
$b_{11} =$		+ 1,448.93 θ^2	− 0,040.145 θ^4	+ 0,000.339.12 θ^6
$b_{13} =$			+ 0,014.489 θ^4	− 0,000.285.58 θ^6
$b_{15} =$				+ 0,000.089.440 θ^6

TABLEAU II

VALEURS DES COEFFICIENTS

H (— 1)

pour la formation de l'équation 92 *et le calcul de la fonction* $\mathcal{E}(s_1)$ *près de la ligne des foyers*

VALEURS DES $H_{2p}^{(m)}$

		n = 1	n = 2	n = 3	n = 4
p = 0	H_0'	1,000	1,000	1,000	1,000
	H_0''	— 1,000	— 3,000	— 6,000	— 10,000
	H_0'''	0,000	3,000	15,000	45,000
	$H_0^{(4)}$	0,000	0,000	— 15,000	— 105,000
	$H_0^{(5)}$	0,000	0,000	0,000	105,000
	$H_0^{(6)}$	0,000	0,000	0,000	0,000
p = 1	H_2'	0,000	0,000	0,000	0,000
	H_2''	— 0,400	— 0,285.71	— 0,266.67	— 0,259.74
	H_2'''	1,200	1,714.29	2,466.67	3,467.53
	$H_2^{(4)}$	— 1,200	— 4,285.71	— 10,800	— 22,987.01
	$H_2^{(5)}$	0,000	4,285.71	25,000	89,805.19
	$H_2^{(6)}$	0,000	0,000	— 25,000	— 200,454.55
	$H_2^{(7)}$	0,000	0.000	0,000	200,454.55
	$H_2^{(8)}$	0,000	0,000	0,000	0,000
p = 2	H_4'	0,000	0,000	0,000	0,000
	H_4''	0,002.285.7	0,001.943.6	— 0,000.682.42	— 0,000.595.12
	H_4'''	0,078.857	0,035.957	0,039.309	0,039.386
	$H_4^{(4)}$	— 0,507.43	— 0,447.04	— 0.528 65	— 0,660.79
	$H_4^{(5)}$	1,285.71	2,113.70	3,589.23	6,026.22
	$H_4^{(6)}$	— 1,285.71	— 5,000	— 14,195.29	— 34,599.79
	$H_4^{(7)}$	0,000	5,000	31,818.18	127,117.26
	$H_4^{(8)}$	0,000	0,000	— 31,818.18	— 277,552.45
	$H_4^{(9)}$	0,000	0.000	0,000	277.552.45
	$H_4^{(10)}$	0,000	0,000	0,000	0,000

TABLEAU III

VALEURS DE $\frac{\theta^3}{2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial s_1}$ A LA SURFACE DES ELLIPSOÏDES ALLONGÉS

(ÉQUATION 92, P. 373)

ÉQUATION NON RÉDUITE, $n = 1$.

$$+\ 0{,}5$$

$$+ \log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\left[1 + 0{,}4\theta^2 \qquad - 0{,}002.285.714\theta^4\right]$$

$$+ \varepsilon \log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\left[1 + 0{,}8\theta^2 \qquad - 0{,}155.428.6\ \theta^4\right]$$

$$+ \left[-2{,}5 - 1{,}0\theta^2 \qquad + 0{,}005.714.286\theta^4\right]$$

$$+ \left[+ 1{,}2\theta^2 \qquad - 0{,}052.571.43\ \theta^4\right]_{(m=3)}$$

$$+ \left[- 0{,}8\theta^2 \quad + 1{,}333.333\ \theta^3 \quad - 0{,}315.428.6\ \theta^4\right]_{(m=4}$$

$$+ \left[- 0{,}888{,}8889.\theta^3 \quad + 1{,}142.857\ \theta^4\right]_{(m=5)}$$

$$+ \left[- 0{,}685.714.3\ \theta^4\right]_{(m=6)}$$

ÉQUATION NON RÉDUITE, $n = 2$.

$$+\ 0{,}5$$

$$+ \log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\left[3 + 0{,}285.714.3\theta^2 \qquad + 0{,}001.943.635\theta^4\right]$$

$$+ \varepsilon \log \frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\left[9{,}0 + 1{,}714.286\ \theta^2 \qquad + 0{,}069.970.85\ \theta^4\right]$$

$$+ \left[-7{,}5 - 0{,}714.285.7\theta^2 \qquad + 0{,}004.859.087\theta^4\right]$$

$$+ \left[-2 + 0{,}857.142.9\theta^2 \qquad - 0{,}023.971.49\ \theta^4\right]_{(m=}$$

$$+ \left[- 2{,}285.714\ \theta^2 + 1{,}333\,333\theta^3 - 0{,}211.208.3\ \theta^4\right]_{(m=4}$$

$$+ \left[+ 1{,}142.857\ \theta^2 - 2{,}666.667\theta^3 + 1{,}334.629\ \theta^4\right]_{(m=5}$$

$$+ \left[+ 1{,}333.333\theta^3 - 2{,}158.730\ \theta^4\right]_{(m=6)}$$

$$+ \left[+ 1{,}015.873\ \theta^4\right]_{(m=7)}$$

TABLE III (*suite*)

Équation non réduite, $n = 3$.

$$+ 0{,}5$$
$$+ \log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\Big[\ 6 + 0{,}266.666.7\,\theta^2 + 0{,}000.682.423.8\,\theta^4\Big]$$
$$+ \varepsilon\log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\Big[+ 36 - 3.200.000\ \theta^2 - 0{,}079.300.20\ \theta^4\Big]$$
$$+ \Big[- 15 - 0{,}666.666.7\,\theta^2 - 0{,}001.706.060\ \theta^4\Big]$$
$$+ \Big[- 10 + 0{,}355\,555.6\,\theta^2 - 0{,}026.205.92\ \theta^4\Big]_{(m=3)}$$
$$+ \Big[+ 2{,}5 - 4{,}200\,000\ \theta^2 + 1{,}333.333\,\theta^3 - 0{,}178.558.9\ \theta^4\Big]_{(m=4)}$$
$$+ \Big[\ + 5{,}555.556\ \theta^2 - 5{,}333.333\,\theta^3 + 1{,}603.442\ \theta^4\Big]_{(m=5)}$$
$$+ \Big[\ - 2{,}222.222\ \theta^2 + 6{,}666.667\,\theta^3 - 4{,}642.275\ \theta^4\Big]_{(m=6)}$$
$$+ \Big[\ - 2{,}666{,}667\,\theta^3 + 5{,}252.525\ \theta^4\Big]_{(m=7)}$$
$$+ \Big[\ - 2{,}020.202\ \theta^4\Big]_{(m=8)}$$

Équation non réduite, $n = 4$.

$$+ 0{,}5$$
$$+ \log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\Big[\ 10 + 0{,}259.740.3\,\theta^2 + 0{,}000.595.120.9\,\theta^4\Big]$$
$$+ \varepsilon\log\frac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\Big[+ 100 + 5{,}194.805\ \theta^2 + 0{,}079.367.42\ \theta^4\Big]$$
$$+ \Big[- 25 - 0{,}649.350.6\,\theta^2 - 0{,}001.487.802\ \theta^4\Big]$$
$$+ \Big[- 30 - 0{,}311.182.31\,\theta^2 - 0{,}026.257.43\ \theta^4\Big]_{(m=3)}$$
$$+ \Big[+ 17{,}5 - 6{,}168\,831\ \theta^2 + 1{,}333.333\,\theta^3 - 0{,}149.609.0\ \theta^4\Big]_{(m=4)}$$
$$+ \Big[-4{,}666.667 + 16{,}008.66\ \theta^2 - 8{,}888.889\,\theta^3 + 1{,}939.960\ \theta^4\Big]_{(m=5)}$$
$$+ \Big[\ - 15{,}272.73\ \theta^2 + 20{,}000.000\,\theta^3 - 8{,}446{,}727\ \theta^4\Big]_{(m=6)}$$
$$+ \Big[\ 5{,}090.909\ \theta^2 - 18{,}666.67\ \theta^3 + 16{,}466.77\ \theta^4\Big]_{(m=7)}$$
$$+ \Big[\ + 6{,}222.222\,\theta^3 - 14{,}489{,}51\ \theta^4\Big]_{(m=8)}$$
$$+ \Big[\ + 4{,}699.301\ \theta^4\Big]_{(m=9)}$$

TABLE IV

VALEURS DES FACTEURS $\Pi_{m,n}$, $\Psi_{m,n}$

(FORM. 33 ; P. 342 ET FORM. 40, P. 343)

POUR LE CALCUL DES COEFFICIENTS α, β PAR LES ÉQ. 34 ET 41

I	$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$	$n = 9$
$\Pi_{1,n}$	0,333 333.3	0,000.000.0	0,000.000 0	0,000.000.0	0,000 000.0
$\Pi_{2,n}$	0,200.000.0	0,057.142.86	0,000 000 0	0,000.000.0	0,000.000 0
$\Pi_{3,n}$	0,142.857,1	0,063.492 06	0,011,544.01	0,000.000.0	0,000.000 0
$\Pi_{4,n}$	0,111.111.1	0,060.606.06	0,018.648.02	0,002.486 402	0,000 000.0
$\Pi_{5,n}$	non calculé	0,055.944.06	0,022.377.62	0,005.265.323	0,000.554.244 5
$\Pi_{6,n}$	»	0,051.282.05	0,024.132.73	0,007.620.862	0,001.451.593
$\Pi_{7,n}$	»	non calculé	non calculé	0,009,435.353	0,002.461.396
$\Pi_{8,n}$	»	»	»	non calculé	0,003.445.955
	$n = 2$	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$
$\Psi_{1,n}$	0,133.333.3	0,000.000.0	0,000.000.0	0,000 000.0	0,000 000.0
$\Psi_{2,n}$	0,114.285.7	0,025.396.83	0,000.000 0	0,000 000.0	0,000.000.0
$\Psi_{3,n}$	0,095.238.10	0,034.632.03	0,005.328.005	0,000.000 0	0,000 000.0
$\Psi_{4,n}$	0,080.808.08	0,037.296.04	0,009.946.123	0,001.170 072	0,000.000 0
$\Psi_{5,n}$	0,069.930.07	0,037.296.04	0,013.163.31	0,002.771.223	0,000 263.926 0
$\Psi_{6,n}$	non calculé	0,036.199 09	0,015.241.72	0,004.354.778	0,000.757.352.8
$\Psi_{7,n}$	»	non calculé	non calculé	0,005.743.258	0,001.378 382
$\Psi_{8,n}$	»	»	»	non calculé	0,002 042.047

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE PREMIER

HISTORIQUE

LIVRE II

COURANTS PERMANENTS OU VARIABLES SANS INDUCTION

LIVRE III

INDUCTION

LIVRE IV

LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

TABLES NUMÉRIQUES

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE BUSSIÈRE







